

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. П. Шпачук
О. І. Рубаненко

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
СПЕЦКУРС

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2016

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.21я73-6
Ш83

Автори:

В. П. Шпачук, доктор технічних наук, професор
О. І. Рубаненко, кандидат технічних наук, доцент

Рецензенти:

В. С. Шмуклер, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельних конструкцій Харківського національного університету імені О. М. Бекетова;

О. К. Морачковський, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»

*Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова,
як навчальний посібник (протокол № 10 від 24.04.2015 р.)*

Шпачук В. П.

Ш83 Теоретична механіка. Спецкурс: навчальний посібник (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) / В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 192 с.

Навчальний посібник містить основні питання аналітичної механіки, стійкості положення рівноваги, малих коливань механічних систем зі скінченним і нескінченним (балок, пластин, оболонок) числом степенів вільності, а також теорії удару. У кожному розділі наведено приклади задач та методики їх розв'язання.

Посібник складено з метою допомоги студентам будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів при підготовці до практичних занять, контрольних робіт, заліків, а також при виконанні самостійної роботи в позааудиторний час із спецкурсу теоретичної механіки.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.21я73-6

© В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, 2016
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	6
I ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ	9
1 Основні поняття і принципи аналітичної статички й динаміки	9
1.1 Механічні в'язі і їх класифікація	9
1.2 Можливі переміщення. Можлива робота. Ідеальні в'язі	12
1.3 Принцип можливих переміщень	15
1.4 Загальне рівняння динаміки	23
<i>Питання для самоконтролю</i>	<i>31</i>
2 Рівняння рівноваги і руху механічної системи в узагальнених координатах	32
2.1 Число степенів вільності. Узагальнені координати й узагальнені швидкості	32
2.2 Узагальнені сили і способи їх визначення	33
2.3 Рівняння рівноваги механічної системи в узагальнених координатах	38
2.4 Диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду)	39
2.5 Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем	42
2.6 Методика розв'язання задач динаміки з використанням рівнянь Лагранжа другого роду	43
<i>Питання для самоконтролю</i>	<i>50</i>
II МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ	51
3 Малі коливання механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги	51
3.1 Визначення положень рівноваги	51
3.2 Стійкість положення рівноваги	54
3.3 Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи. Теорема Лагранжа-Діріхле. Критерій Сильвестра	57
3.4 Вираження кінетичної енергії системи через узагальнені координати й швидкості	62
3.5 Дисипативні сили. Функція розсіювання Релея	64
3.6 Малі коливання консервативної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги	65

3.7 Вплив сил опору на малі коливання консервативної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги	72
3.8 Малі вимушені коливання механічної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги	78
3.8.1 Випадок довільної збурюючої сили	78
3.8.2 Випадок гармонійної збурюючої сили	83
3.8.3 Коефіцієнт динамічності при дії гармонійної збурюючої сили	84
<i>Питання для самоконтролю</i>	<i>87</i>
4 Малі коливання механічних систем зі скінченим числом степенів вільності навколо положення стійкої рівноваги	88
4.1 Вільні коливання консервативної системи з двома степенями вільності	88
4.2 Вимушені коливання системи з двома степенями вільності	95
4.3 Динамічний гаситель коливань	97
4.4 Використання коефіцієнтів податливості для дослідження коливань системи з двома степенями вільності	101
4.4.1 Вільні коливання	101
4.4.2 Вимушені коливання	109
4.5 Коливання систем зі скінченим числом степенів вільності	114
4.6 Методи захисту від вібрацій	115
<i>Питання для самоконтролю</i>	<i>116</i>

ІІІ МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З

РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

5 Поздовжні коливання прямих стержнів (балок)	118
5.1 Диференціальне рівняння руху елемента стержня	119
5.2 Розв'язання диференціального рівняння вільних коливань стержня	120
5.3 Граничні умови	122
5.4 Приклади розрахунку поздовжніх коливань пружного стержня	123
<i>Питання для самоконтролю</i>	<i>127</i>
6 Поперечні коливання прямих стержнів (балок)	127
6.1 Диференціальне рівняння руху елемента стержня	127
6.2 Розв'язання диференціального рівняння вільних коливань стержня	129
6.3 Граничні умови	131

6.4 Приклад розрахунку власних частот і форм поперечних коливань пружного стержня	133
6.5 Вимушені поперечні коливання стержня	137
6.5.1 Спосіб розкладання за власними формами коливань	137
6.5.2 Спосіб безпосереднього розв'язку	142
<i>Питання для самоконтролю</i>	152
7 Наближені методи визначення власних частот поперечних коливань стержнів	152
7.1 Метод Релея (енергетичний метод)	152
7.2 Метод Донкерлі (метод «зведення» мас)	155
7.3 Приклад розрахунку основної частоти поперечних коливань стержня з приєднаними масами	158
<i>Питання для самоконтролю</i>	163
8 Вільні коливання пружних пластин і оболонок	164
8.1 Вільні поперечні коливання пластини	164
8.2 Поперечні коливання пластини з шарнірно обпертими краями	166
8.3 Вільні коливання колової циліндричної оболонки з шарнірно обпертими торцями	169
<i>Питання для самоконтролю</i>	177
IV ОСНОВИ ТЕОРІЇ УДАРУ	178
9 Елементарна теорія удару	178
9.1 Основні визначення і рівняння теорії удару матеріальної точки	178
9.2 Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення при ударі	180
9.3 Загальні теореми теорії удару механічної системи	183
9.3.1 Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі	183
9.3.2 Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі	184
9.3.3 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі (теорема Карно)	185
9.4 Поняття про центр удару	187
<i>Питання для самоконтролю</i>	189
Список використаних джерел	190
Предметний покажчик	191

ВСТУП

Спеціальний курс (спецкурс) з теоретичної механіки включає основи: аналітичної механіки, теорії стійкості рівноваги і малих коливань механічних систем зі скінченним числом степенів вільності, малих коливань пружних елементів будівельних конструкцій (механічних систем з нескінченним числом степенів вільності – балок, пластин, оболонок), а також теорії удару.

Вивчення цих розділів для бакалавра за напрямом «Будівництво» і спеціаліста-будівельника необхідне для проектування, будівництва та експлуатації будівель і споруд з урахуванням динамічних дій, а також захисту робочих місць і вузлів устаткування від шкідливого впливу вібрацій. Цей спецкурс є основою для вивчення ряду розділів курсів опору матеріалів, будівельної механіки, будівельної техніки, будівельних конструкцій, підвалін, фундаментів і механіки ґрунтів тощо.

Необхідною умовою розв'язання задач аналітичної механіки і малих коливань механічних систем є знання апарату вищої математики, зокрема таких її розділів, як диференціальні рівняння у звичайних і частинних похідних, похідні функцій одній і кількох змінних, інтегральне числення, рівняння математичної фізики тощо.

Більшість будівельних конструкцій і їх елементів у процесі будівництва і експлуатації в тій чи іншій мірі підлягають дії динамічних навантажень. Ці навантаження викликаються:

- працюючими в будівлях машинами, турбоагрегатами, компресорами, мостовими кранами та іншим устаткуванням;
- дією вітру на висотні споруди й конструкції баштового типу, мости, наземні трубопроводи;
- сейсмічними діями, що передаються через ґрунт на фундаменти споруд;
- вібраціями від руху транспорту і поїздів метрополітену, а також коливаннями сусідніх споруд;
- ударами й вибухами як елементами технологічних процесів (штамповка за допомогою вибуху, забивання палів тощо);
- вибухами при аваріях, акустичними вибуховими хвилями.

Пружні елементи будівельних конструкцій мають такі властивості, що при відхиленні від положення рівноваги виконують коливальний рух. Вібраційні дії з усіх видів механічних впливів на технічні об'єкти є найбільш небезпечними. Знакозмінні напруження, що викликаються вібрацією, сприяють накопиченню пошкоджень у матеріалах, появі тріщин і стомливому руйнуванню, особливо в умовах резонансних явищ. Для зменшення впливу коливань на людину і елементи конструкцій у сучасному будівництві широко

використовують різні методи захисту від вібрацій. Тому визначення основних характеристик коливального руху механічних систем і елементів будівельних конструкцій є важливим етапом при проектуванні, будівництві і експлуатації споруд.

Основними задачами при вивченні спецкурсу є набуття вмінь і навичок у складанні рівнянь рівноваги і руху механічної системи методами аналітичної механіки (принцип можливих переміщень, рівняння Лагранжа другого роду), визначенні положень рівноваги консервативних систем і їх стійкості, а також основних параметрів коливального руху (власних частот і форм вільних коливань, амплітуд вимушених коливань) систем з одним, двома і нескінченним (стержні, пластини, оболонки) числом степенів вільності навколо положень стійкої рівноваги, розв'язанні задач динаміки точки і механічної системи при ударних навантаженнях.

Основи аналітичної механіки закладені у XVIII ст. працями І. Бернуллі (1667-1748), Л. Ейлера (1707-1783), Ж. Л. Даламбера (1717-1783) і Ж. Л. Лагранжа (1736-1813). Ж. Л. Даламбер сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статички (принцип Даламбера). Ж. Л. Лагранж у своєму творі "Аналітична механіка" (1788 р.) сформулював найбільш загальний принцип статички – принцип можливих переміщень, отримав важливу закономірність механіки – загальне рівняння динаміки (принцип Даламбера-Лагранжа), і вивів у загальному вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи.

У подальшому працями видатних математиків і механіків: П. Л. Мопертюї (1698-1759), П. С. Лапласа (1749-1827), К. Ф. Гаусса (1777-1855), С. Пуассона (1781-1840), У. Р. Гамільтона (1805-1865), К. Г. Якобі (1804-1851), М. В. Остроградського (1801-1861) – завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) і розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Теорія стійкості рівноваги та руху, яка була тісно пов'язана з проблемою точного приладобудування, створена і розвинута працями Л. Ейлера, Ж. Л. Лагранжа, П. Діріхле (1805-1859), Е. Рауса (1831-1907), М. Є. Жуковського (1847-1921), О. М. Ляпунова (1857-1918), А. Пуанкаре (1854-1912), М. Г. Четаєва (1902-1959), І. Г. Малкіна (1907-1958) та ін. Особливо важливий внесок зробив О. М. Ляпунов, який створив загальну теорію стійкості руху.

Дослідження коливального руху в задачах динаміки пов'язані з іменами Г. Галілея (1564-1642), Х. Гюйгенса (1629-1695), І. Ньютона (1643-1727). Основи теорії малих коливань навколо стійкого положення рівноваги механічної системи були розроблені Ж. Л. Лагранжем. Проблема боротьби з небезпечними вібраціями машин і споруд у ХІХ ст. призвела до подальшого розроблення теорії малих коливань, де значні результати були отримані Релеєм (1842-1919), А. Пуанкаре, О. М. Криловим (1863-1945).

У першій половині ХХ ст. розвиток машино- і приладобудування, авіації, мостобудування і особливо радіотехніки зумовили актуальність дослідження нелінійних коливань. Основоположниками загальної теорії нелінійних коливань можна вважати О. М. Ляпунова і А. Пуанкаре. У подальшому суттєвий вклад в розвиток цієї області внесли радянські вчені М. М. Крилов (1879-1955), Л. І. Мандельштам (1879-1944), М. Д. Папалексі (1880-1947), О. О. Андронов (1901-1952), В. О. Кононенко (1918-1975), М. М. Боголюбов (1909-1992), Ю. О. Митропольський (1917-2008), М. В. Бутенін (1914-1995) та ін. В останні роки нелінійна динаміка є одним з напрямів природознавства, що найбільш бурхливо розвивається. Методи, які розроблені математиками, механіками, фізиками в області теорії динамічних систем, дозволяють вивчати процеси, явища і використовувати знання про них на практиці в самих різних галузях науки – від механіки, фізики, хімії, біології до соціології, кліматології, астрофізики.

I ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Загальні теореми динаміки теоретичної механіки складають достатньо потужний інструмент дослідження руху механічної системи, проте їх застосування пов'язане з деякими труднощами. По-перше, часто не можна заздалегідь визначити, яка з теорем дозволить швидше розв'язати певну задачу. По-друге, при розв'язанні деяких задач доводиться вводити у розгляд невідомі реакції в'язей, визначення яких не завжди потрібно за умовою задачі. Нарешті, кожна окрема теорема не може повністю охарактеризувати рух системи, тобто з окремої теореми не можна отримати всю сукупність диференціальних рівнянь руху механічної системи.

Аналітична механіка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються найбільш загальні аналітичні методи складання і розв'язання задач механіки вільних і невільних систем матеріальних точок і твердих тіл.

Методи дослідження, які розроблені в аналітичній механіці, використовують як в інших областях механіки (теорія пружності, стійкості рівноваги і руху, малих коливань механічних систем, гіроскопів, автоматичного регулювання, автоматичного керування рухом літальних апаратів, динаміка неголономних систем, гідромеханіка тощо), так і в суміжних областях природознавства (прикладна математика, термодинаміка, електродинаміка, робототехніка, статистична фізика, квантова механіка тощо).

Основу аналітичної механіки складають три групи положень:

- 1) варіаційні принципи – формулюють найбільш загальні закономірності механіки;
- 2) диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок – є наслідками варіаційних принципів;
- 3) загальні методи інтегрування диференціальних рівнянь динаміки.

1 Основні поняття і принципи аналітичної статички й динаміки

Одними з основних понять аналітичної механіки є поняття в'язей і можливих (віртуальних) переміщень.

1.1 Механічні в'язі і їх класифікація

Поняття в'язі розглянуто в розділі “Статика” курсу теоретичної механіки і її дія на тіло характеризувалась реакцією в'язі. Але в'язь можна розглядати і як обмеження, що накладається на переміщення і швидкості точок системи.

Такий шлях дозволяє отримати рівняння рівноваги або руху системи, які не містять заздалегідь невідомі реакції в'язей.

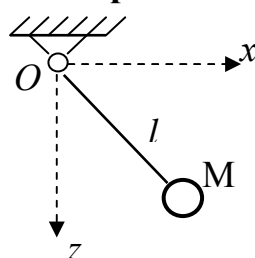
Система матеріальних точок називається **вільною**, якщо положення і швидкості окремих її точок можуть приймати будь-які значення. В іншому випадку система називається **невільною**. Обмеження, що накладаються на положення і швидкості окремих точок системи, називаються **в'язями**. Конструктивно механічні в'язі реалізуються за допомогою шарнірів, поверхонь, стержнів, ниток та ін. Проте в'язі можуть бути і не виключно механічними, а в сукупності, наприклад, із системами регулювання і керування.

Обмеження на положення і швидкості точок можна описати за допомогою рівностей або нерівностей, які називаються **рівняннями в'язей**. У загальному випадку рівняння в'язі для однієї точки можна записати у вигляді

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \quad (1.1)$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Матеріальна точка M прикріплена до ідеального стержня OM довжиною l (рис. 1.1) і може здійснювати коливання у вертикальній площині xOz . Декартові координати матеріальної точки повинні задовольняти рівнянню в'язі:



$$x^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (1.2)$$

Рисунок 1.1

Приклад 2. Матеріальна точка M прикріплена до гнучкої нитки довжиною l (рис. 1.1). Рівняння в'язі буде:

$$x^2 + z^2 - l^2 \leq 0. \quad (1.3)$$

Знак рівності відповідає моментам часу, коли нитка буде натягнутою, а знак нерівності – коли нитка буде не натягнутою.

Приклад 3. Матеріальна точка M прикріплена до гнучкої нитки, інший кінець якої перекинутий через блок і рухається зі сталою швидкістю V_0 (рис. 1.2).

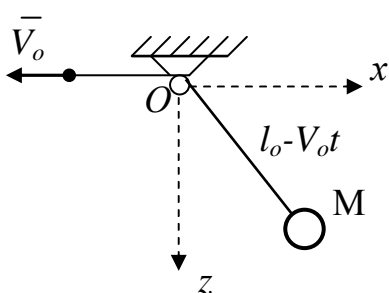


Рисунок 1.2

Рівняння в'язі буде:

$$x^2 + z^2 - (l_0 - V_0 t)^2 \leq 0, \quad (1.4)$$

де l_0 – довжина частини нитки, що звисає, у початковий момент часу.

Приклад 4. Куля рухається по горизонтальній шорсткій поверхні без ковзання (рис. 1.3).

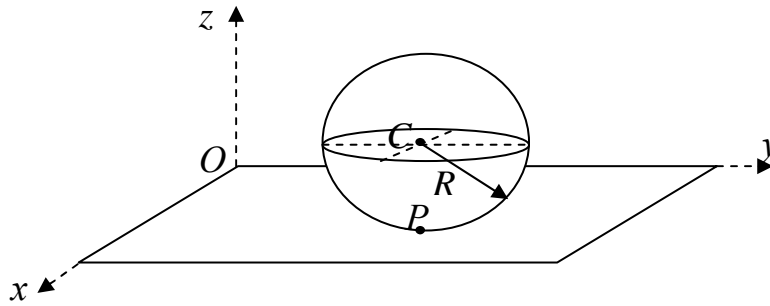


Рисунок 1.3

При цьому координата z центра мас C кулі повинна задовольняти умові

$$z_c \geq R, \quad (1.5)$$

де R – радіус кулі. Крім того, швидкість точки P дотику кулі до поверхні дорівнює нулю:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_c + \bar{\omega} \times \bar{CP} = 0,$$

що, згідно з теорією руху тіла з однією нерухомою точкою, еквівалентно двом скалярним рівностям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c - R(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) &= 0; \\ \dot{y}_c + R(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

де ψ, θ, φ – кути Ейлера [7].

Введемо кілька визначень.

В'язі називаються **стаціонарними**, якщо рівняння (нерівності) в'язей не містять час t явно. В іншому випадку в'язі називаються **нестаціонарними**.

В'язі називаються **утримуючими (двобічними)**, якщо вони описуються рівностями. Якщо в'язі описуються нерівностями, вони називаються **неутримуючими (однобічними)**.

В'язі називаються **голономними**, якщо рівняння (нерівності) в'язей не містять проекції швидкостей, або містять у формі, що може бути зінтегрованою. В іншому випадку в'язі називаються **неголономними**.

У розглянутих прикладах в'язі можна охарактеризувати таким чином:

- в'язь, яка описується рівнянням (1.2) – стаціонарна, утримуюча, голономна;
- нерівністю (1.3) – стаціонарна, неутримуюча, голономна;
- нерівністю (1.4) – нестаціонарна, неутримуюча, голономна;
- нерівністю (1.5) – стаціонарна, неутримуюча, голономна;
- рівняннями (1.6) – стаціонарна, утримуюча, неголономна (оскільки рівняння (1.6) не можна зінтегрувати).

Зауваження. При розв'язанні задач неутримуючу в'язь можна розглядати як утримуючу, якщо під час руху (рівноваги) в'язь описується рівністю (наприклад, нитка весь час натягнута; тіло, що ковзає уздовж поверхні, не відривається від неї тощо).

1.2 Можливі переміщення. Можлива робота. Ідеальні в'язі

Можливим (віртуальним) переміщенням точки $\delta \vec{r}$ називається уявне нескінченно мале її переміщення, що не суперечить накладеним на точку в'язям і відбувається у фіксований момент часу.

Слід підкреслити, що можливе переміщення – це переміщення, яке могла б здійснити точка, не порушуючи в'язей, і визначається тільки характером цих в'язей, а не діючими на точку силами.

Приклад 5. Матеріальна точка знаходиться на горизонтальній поверхні (рис. 1.4).

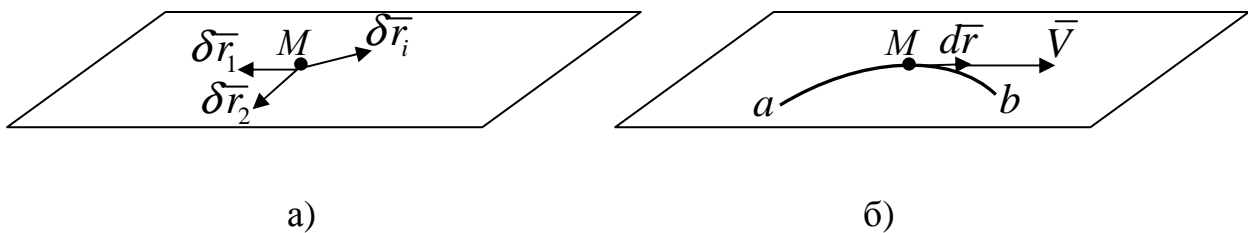


Рисунок 1.4

Можливі переміщення $\delta \vec{r}_i$ – переміщення по поверхні у будь-якому напрямку (рис. 1.4, а). Число таких переміщень нескінченне. Вектор дійсного елементарного переміщення $d\vec{r}$ (рис. 1.4, б) напрямлений по дотичній до траєкторії ab руху точки M у бік її швидкості \vec{V} .

На відміну від можливих, дійсні елементарні переміщення $d\vec{r}_k$ механічної системи відбуваються під дією певних сил за проміжок часу dt . У разі векторного способу завдання руху

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(x_k, y_k, z_k, t),$$

де $k = 1, \dots, N$ (N – число точок механічної системи), дійсні елементарні переміщення характеризуються нескінченно малими приростами радіусів-векторів \vec{r}_k і з точністю до малих другого порядку мализни визначаються їхніми **диференціалами**:

$$d\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt. \quad (1.7)$$

Можливі переміщення відбуваються при фіксованому часі t ($\delta t = 0$) і з точністю до малих другого порядку мализни математично визначаються *варіаціями* радіусів-векторів \bar{r}_k :

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} \delta z_k. \quad (1.8)$$

Із сказаного можна зробити висновок, що дійсні переміщення системи $d\bar{r}_k$ є одними з її можливих переміщень $\delta \bar{r}_k$ тільки в разі стаціонарних в'язей.

Можливим (віртуальним) переміщенням механічної системи називається сукупність можливих переміщень окремих її точок.

Можливою роботою сили називається скалярний добуток вектора сили \bar{F} на вектор можливого переміщення $\delta \bar{r}$ точки її прикладення (або добуток модуля сили на модуль можливого переміщення точки її прикладення і на косинус кута між векторами сили і можливого переміщення точки її прикладення):

$$\delta A_F = \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = F \cdot \delta r \cdot \cos(\widehat{\bar{F}, \delta \bar{r}}). \quad (1.9)$$

Можлива робота пари сил визначається як взятий з відповідним знаком добуток модулю моменту пари сил M на можливий кут повороту $\delta \varphi$ тіла, до якого прикладена пара сил:

$$\delta A_M = \pm M \cdot \delta \varphi. \quad (1.10)$$

Береться знак «+», якщо напрями моменту пари сил M і можливого кута повороту $\delta \varphi$ збігаються, і знак «-», якщо вони протилежні за напрямом.

Введемо ще одну класифікацію в'язей.

В'язі називаються **ідеальними**, якщо сума робіт їх реакцій на будь-яких можливих переміщеннях механічної системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (1.11)$$

де \bar{R}_k – рівнодійна реакцій в'язей, прикладених до k -ї точки системи.

Приклади ідеальних в'язей

1. Ідеально гладенька поверхня (рис. 1.5).

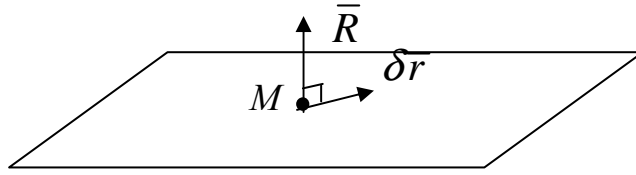


Рисунок 1.5

Оскільки реакція \bar{R} перпендикулярна до поверхні, а можливе переміщення точки M $\delta \bar{r}$ лежить у її площині, то

$$\delta A_R = \bar{R} \cdot \delta \bar{r} = R \cdot \delta r \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

2. Нерухомий шарнір без тертя (рис. 1.6).

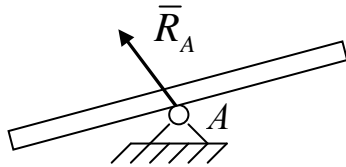


Рисунок 1.6

Оскільки точка A нерухома, то її можливе переміщення $\delta \bar{r}_A = 0$, отже

$$\delta A_{R_A} = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{r}_A = \bar{R}_A \cdot 0 = 0.$$

3. Рухомий шарнір без тертя (рис. 1.7).

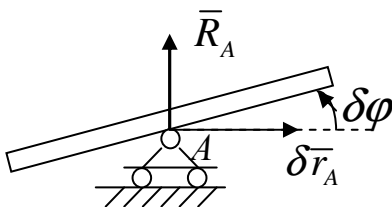


Рисунок 1.7

У даному випадку, якщо точка A отримає можливе переміщення $\delta \bar{r}_A$, то

$$\delta A_{R_A} = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{r}_A = R_A \cdot \delta r_A \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Якщо тіло обернеться навколо точки A на можливий кут $\delta \varphi$, то

$$\delta A_{R_A} = M_A(\bar{R}_A) \cdot \delta \varphi = 0 \cdot \delta \varphi = 0.$$

4. Кочення без ковзання абсолютно твердого тіла по шорсткій абсолютно твердій поверхні (рис. 1.8).

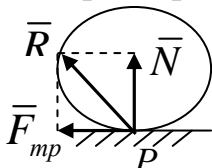


Рисунок 1.8

Оскільки точка P є миттєвим центром швидкостей, то її швидкість, а значить і можливе переміщення дорівнюють нулю. Тоді можлива робота реакції \bar{R}

$$\delta A_R = \bar{R} \cdot \delta \bar{r} = \bar{R} \cdot 0 = 0.$$

5. *Жорстка незмінна система* (абсолютно тверде тіло, ідеальний стержень та ін.).

Розглянемо дві матеріальні точки, що зв'язані ідеальним стержнем (рис. 1.9).

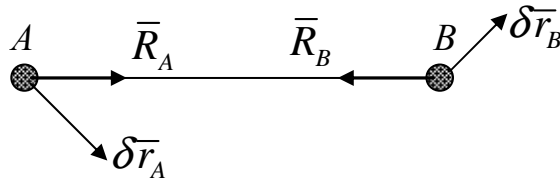


Рисунок 1.9

Реакції стержня на матеріальні точки A і B напрямлені по стержню і $\bar{R}_A = -\bar{R}_B$. З умови нерозтягнення стержня маємо:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 = (AB)^2, \quad (AB = \text{const}).$$

Застосуємо далі операцію варіації (див. формулу (1.8)) до останнього рівняння:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A) \cdot (\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A) = 0.$$

Рівність нулю скалярного добутку векторів $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$ і $(\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A)$ означає, що ці вектори є взаємно перпендикулярними.

Знайдемо тепер суму можливих робіт реакцій в'язей \bar{R}_A, \bar{R}_B на можливому переміщенні системи:

$$\delta A = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B = -\bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B = \bar{R}_B \cdot (\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A) = 0.$$

Останній добуток дорівнює нулю, оскільки вектор \bar{R}_B , який співпадає з напрямком вектора $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$, перпендикулярний до вектора $(\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A)$.

Таким чином, отримано, що ідеальний стержень, а також внутрішні в'язі абсолютно твердого тіла є ідеальними в'язями.

1.3 Принцип можливих переміщень

Сили, що діють на невільну механічну систему, можна поділити на активні і реакції в'язей. *Активними* будемо вважати сили, що спричиняють своєю дією прискорення точок системи або реакції в'язей. Активні сили не залежать від в'язей. *Реакції в'язей* вважають пасивними силами, бо вони виникають лише тоді, коли на систему діють активні сили.

Принцип можливих переміщень – це найзагальніший принцип аналітичної статyki, який встановлює умови рівноваги механічної системи. У сучасному вигляді він формулюється за допомогою **теорему Лагранжа-Остроградського**: для рівноваги механічної системи з ідеальними,

голономними, стаціонарними і утримуючими в'язями необхідно і достатньо, щоб сума робіт всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи і швидкості всіх точок в початковий момент часу дорівнювали нулю:

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \bar{V}_k \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.12)$$

Доведення

Необхідність. Нехай система N матеріальних точок знаходиться в рівновазі. Тоді для кожної точки, відповідно до умови рівноваги системи збіжних сил, виконується рівність

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, N), \quad (1.13)$$

де \bar{F}_k, \bar{R}_k – рівнодійні активних сил і реакцій в'язей відповідно, які прикладені до k -ї точки системи.

Надамо системі можливе переміщення $\delta \bar{r}_k$, помножимо рівність (1.13) скалярно на вектор $\delta \bar{r}_k$ і підсумуємо для всіх точок системи:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (1.14)$$

За визначенням ідеальних в'язей (1.11), другий доданок у (1.14) дорівнює нулю, тому виконується

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Необхідність, таким чином, доведена.

Достатність. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що умови (1.12) виконуються, але система почала рухатись із стану спокою ($\bar{V}_k \Big|_{t>0} \neq 0$). Оскільки в'язі стаціонарні, то елементарне дійсне переміщення $d\bar{r}_k$ буде співпадати з одним із можливих $\delta \bar{r}_k$. На підставі теореми про зміну кінетичної енергії системи, враховуючи, що кінетична

енергія системи T у довільний момент часу додатна ($T > 0$), а у стані спокою дорівнює нулю ($T_0 = 0$), матимемо

$$T - T_0 = \delta A > 0,$$

або, враховуючи (1.9)

$$\delta A = \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k > 0.$$

Оскільки в'язі ідеальні, то виконується умова (1.11). Тоді залишається вираз

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0,$$

що суперечить початковому припущенню. Отже, достатність, а з нею і вся теорема доведена.

Рівняння (1.12) можна подати і у скалярній формі:

$$\sum_{k=1}^N (F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k) = 0, \quad (1.15)$$

де $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – проекції можливого переміщення $\delta \bar{r}_k$ на осі координат.

Рівняння (1.12) або (1.15) називають **загальним рівнянням статки**.

Важливо підкреслити, що принцип можливих переміщень (ПВП) дозволяє скласти умови рівноваги механічної системи, не враховуючи реакції ідеальних в'язей. При цьому перевага над звичайними геометричними методами статки відчутна тим більше, чим більше твердих тіл входить до системи.

Можна виділити три групи задач, при розв'язанні яких використання ПВП є достатньо ефективним:

- 1) розрахунок стану рівноваги найпростіших механізмів (домкратів, пресів (стержневих, гвинтових, клинових), підйомних механізмів тощо);
- 2) розрахунок статично визначених елементів конструкцій (балок, ферм, арок, рам) на нерухоме навантаження. За допомогою ПВП можна визначити реакції в'язей або внутрішні силові фактори (кінематичний метод розрахунку в курсі будівельної механіки). При цьому кожний силовий фактор визначається незалежно від інших;
- 3) розрахунок статично визначених елементів конструкцій на рухоме навантаження за допомогою ліній впливу (курс будівельної механіки). При цьому епюра переміщень, що будується при застосуванні ПВП, при одиничному переміщенні в напрямку шуканого силового фактора і є лінією впливу цього фактора.

Зробимо деякі зауваження при застосуванні ПВП для визначення реакцій в'язей.

Зауваження 1. Якщо в механічній системі є неідеальні в'язі, то їх реакції (наприклад, сили тертя, пружні в'язі) потрібно віднести до активних сил.

Зауваження 2. Для визначення реакції ідеальної в'язі її треба відкинути, а відповідну реакцію додати до активних сил.

Зауваження 3. ПВП дозволяє скласти одне рівняння, з якого можна визначити тільки одну невідому величину. Якщо реакція ідеальної в'язі складається з декількох складових реакції (наприклад, нерухомий шарнір, защемлення), тоді в'язь треба замінити іншою, яка забезпечить можливе переміщення точки системи, де розташована в'язь, у напрямку дії складової реакції, яку треба визначити. Наприклад, для визначення вертикальної складової реакції нерухомого шарніра його треба замінити вертикально розташованим повзуном з шарнірним кріпленням до конструкції і додати вертикальну складову реакції до активних сил. Для визначення вертикальної складової реакції защемлення в'язь можна замінити вертикально розташованим повзуном, до якого розглядувана конструкція кріпиться жорстко, а для визначення моменту пари сил у защемленні – нерухомим шарніром.

Приклад 6. Двопрогонова балка АВ складається з двох балок АС і СВ, які з'єднані між собою шарніром С. На балку АВ діють вертикальна сила $F_1 = 20$ кН і сила $F_2 = 30$ кН, що нахилена під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту. Параметр $a = 2$ м (рис. 1.10, а). Визначити реакції защемлення в точці В і рухомого шарніру А.

Розв'язання

Реакції защемлення складаються з двох складових \bar{X}_B, \bar{Y}_B і пари сил з моментом $M_{защ}$, а реакція рухомого шарніра – з однієї сили \bar{R}_A .

1. Для визначення моменту $M_{защ}$ замінимо защемлення нерухомим шарніром, додаючи при цьому пару сил з моментом $M_{защ}$ (рис. 1.10, б). Надаючи балці АВ можливе переміщення (наприклад, переміщуючи точку С униз), дістанемо конфігурацію, що показана штриховою лінією на рисунку 1.10, б.

Складемо загальне рівняння статички (принцип можливих переміщень) (1.12), враховуючи формули (1.9), (1.10) для можливої роботи сили і пари сил:

$$F_1 \cdot \delta r_1 \cdot \cos 0^\circ + F_2 \cdot \delta r_2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - M_{защ} \cdot \delta \varphi = 0,$$

або

$$F_1 \cdot \delta r_1 + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot \delta r_2 - M_{защ} \cdot \delta \varphi = 0.$$

Розглядаючи трикутники на рисунку 1.10, б і враховуючи мализну кута $\delta\varphi$, отримаємо геометричні співвідношення між можливими переміщеннями:

$$\delta r_1 = \frac{1}{2} \delta r_c, \quad \delta r_2 = \frac{1}{2} \delta r_c, \quad \delta\varphi = \frac{\delta r_c}{4a}.$$

Підставляючи отримані формули у загальне рівняння статки, дістанемо

$$\left(F_1 \cdot \frac{1}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} - M_{зашц} \cdot \frac{1}{4a} \right) \cdot \delta r_c = 0.$$

Враховуючи, що δr_c є довільним можливим переміщенням ($\delta r_c \neq 0$), матимемо

$$F_1 \cdot \frac{1}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} - M_{зашц} \cdot \frac{1}{4a} = 0,$$

звідки

$$M_{зашц} = 2a(F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha) = 4 \cdot (20 + 30 \cdot 0,7) = 164 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

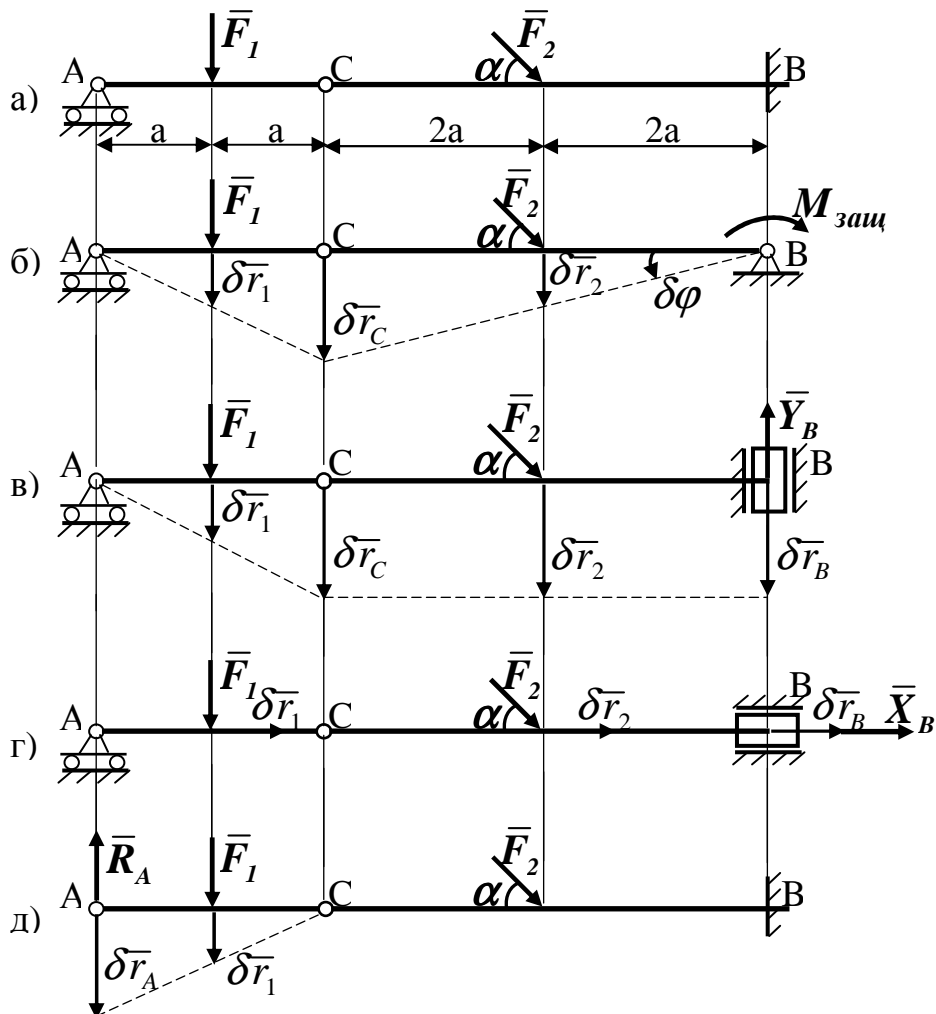


Рисунок 1.10

2. Для визначення вертикальної складової \bar{Y}_B реакції замінимо защемлення вертикально розташованим повзуном, до якого розглядувана конструкція кріпиться жорстко (рис. 1.10, в). Надаючи балці АВ можливе переміщення (наприклад, переміщуючи точку С униз), дістанемо конфігурацію, що показана штриховою лінією на рисунку 1.10, в.

Складемо загальне рівняння статки (1.12):

$$F_1 \cdot \delta r_1 \cdot \cos 0^\circ + F_2 \cdot \delta r_2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + Y_B \cdot \delta r_B \cdot \cos 180^\circ = 0,$$

або

$$F_1 \cdot \delta r_1 + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot \delta r_2 - Y_B \cdot \delta r_B = 0.$$

Як витікає з рисунку 1.10, в, геометричні співвідношення між можливими переміщеннями будуть

$$\delta r_1 = \frac{1}{2} \delta r_C, \quad \delta r_2 = \delta r_B = \delta r_C.$$

Підставляючи отримані формули у загальне рівняння статки, дістанемо

$$\left(F_1 \cdot \frac{1}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha - Y_B \right) \cdot \delta r_C = 0,$$

або

$$F_1 \cdot \frac{1}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha - Y_B = 0.$$

З останнього рівняння отримаємо

$$Y_B = F_1 \cdot \frac{1}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot 0,7 = 31 \text{ кН}.$$

3. Для визначення горизонтальної складової \bar{X}_B реакції замінимо защемлення горизонтально розташованим повзуном, до якого розглядувана конструкція кріпиться жорстко (рис. 1.10, г). Надамо балці АВ можливе переміщення (наприклад, переміщуючи всі точки по горизонтальній прямій вправо) і складемо загальне рівняння статки (1.12):

$$F_1 \cdot \delta r_1 \cdot \cos 90^\circ + F_2 \cdot \delta r_2 \cdot \cos \alpha + X_B \cdot \delta r_B \cdot \cos 0^\circ = 0,$$

або

$$F_2 \cdot \cos \alpha \cdot \delta r_2 + X_B \cdot \delta r_B = 0.$$

Як витікає з рисунку 1.10, г, балка переміщується вправо як тверде тіло, тому

$$\delta r_2 = \delta r_B.$$

Підставляючи це співвідношення у загальне рівняння статки, дістанемо

$$(F_2 \cdot \cos \alpha + X_B) \cdot \delta r_B = 0,$$

або

$$F_2 \cdot \cos \alpha + X_B = 0.$$

З цього рівняння отримаємо

$$X_B = -F_2 \cdot \cos \alpha = -30 \cdot 0,7 = -21 \text{ кН}.$$

4. Для визначення реакції рухомого шарніра А уявно відкинемо цю опору і замінімо її дію реакцією \bar{R}_A (рис. 1.10, д). Надаючи балці АВ можливе переміщення (наприклад, переміщуючи точку А униз), дістанемо конфігурацію, що показана штриховою лінією на рисунку 1.10, д.

Складемо загальне рівняння статки (1.12):

$$R_A \cdot \delta r_A \cdot \cos 180^\circ + F_1 \cdot \delta r_1 \cdot \cos 0^\circ = 0,$$

або

$$-R_A \cdot \delta r_A + F_1 \cdot \delta r_1 = 0.$$

Як витікає з рисунку 1.10, д, геометричне співвідношення між можливими переміщеннями буде

$$\delta r_1 = \frac{1}{2} \delta r_A.$$

Підставляючи отримане співвідношення у загальне рівняння статки, дістанемо

$$\left(-R_A + F_1 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \delta r_A = 0,$$

або

$$-R_A + F_1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

З останнього рівняння отримаємо

$$R_A = F_1 \cdot \frac{1}{2} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ кН}.$$

Відповідь. Реакції защемлення в точці В і рухомого шарніра А дорівнюють $X_B = -21$ кН, $Y_B = 31$ кН, $M_{защ} = 164$ кН·м, $R_A = 10$ кН. Знак «-» величини X_B означає, що складова \bar{X}_B має напрям, протилежний до показаного на рисунку 1.10, г.

Приклад 7. На складену раму АВ діють горизонтальна сила $F = 40 \text{ кН}$ і пара сил з моментом $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Параметр $a = 3 \text{ м}$ (рис. 1.11, а). Визначити горизонтальну складову реакції нерухомого шарніра В.

Розв'язання

Для визначення горизонтальної складової реакції замінимо нерухомий шарнір рухомим, додаючи при цьому силу \bar{X}_B (рис. 1.11, б). Надамо рамі АВ можливе переміщення, наприклад, переміщуючи точку D вправо. Ліва частина рами АС буде здійснювати при цьому обертальний рух навколо точки А, а права СВ – плоскопаралельний рух. Оскільки рама є системою зі стаціонарними в'язями, то дійсне елементарне переміщення буде співпадати з одним із можливих переміщень. Тому напрями і співвідношення між можливими переміщеннями точок рами будуть такими, як і між відповідними швидкостями при дійсному елементарному переміщенні (рис. 1.11, б).

Складемо загальне рівняння статки (1.12):

$$F \cdot \delta r_D \cdot \cos 0^\circ + X_B \cdot \delta r_B \cdot \cos 180^\circ - M \cdot \delta \varphi = 0,$$

або

$$F \cdot \delta r_D - X_B \cdot \delta r_B - M \cdot \delta \varphi = 0.$$

Складемо співвідношення між відповідними швидкостями і кутовими швидкостями. Для лівої частини рами АВ

$$\omega_{AB} = \frac{V_D}{DA} = \frac{V_C}{CA},$$

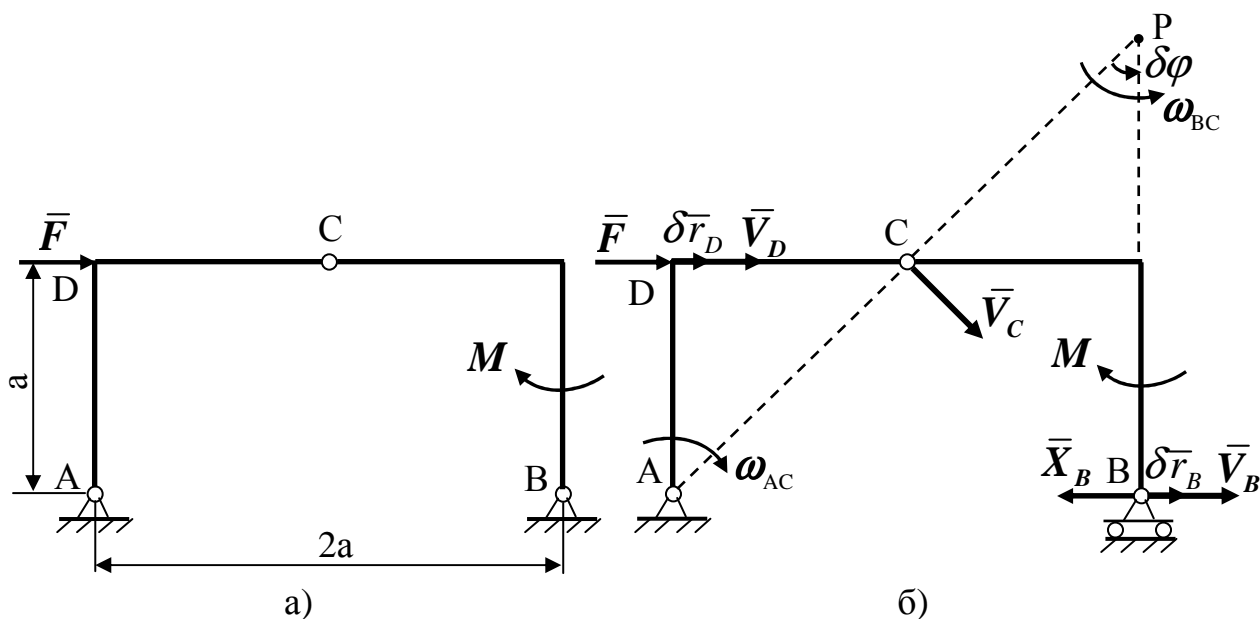


Рисунок 1.11

Звідки

$$V_C = \frac{V_D \cdot CA}{DA} = \frac{V_D \cdot a\sqrt{2}}{a} = V_D \sqrt{2}.$$

Для правої частини рами СВ

$$\omega_{BC} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP},$$

де точка Р – миттєвий центр швидкостей. Отже,

$$V_B = \frac{V_C \cdot BP}{CP} = \frac{V_C \cdot 2a}{a\sqrt{2}} = V_C \frac{2}{\sqrt{2}} = V_D \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{2}} = 2V_D,$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{a\sqrt{2}} = \frac{V_D \sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{V_D}{a}.$$

Тоді співвідношення між відповідними можливими переміщеннями будуть

$$\delta r_B = 2\delta r_D, \quad \delta \varphi = \frac{\delta r_D}{a}.$$

Підставляючи отримані формули у загальне рівняння статички, дістанемо

$$\left(F - X_B \cdot 2 - \frac{M}{a} \right) \cdot \delta r_D = 0.$$

Враховуючи, що δr_D є довільним можливим переміщенням ($\delta r_D \neq 0$), матимемо

$$F - X_B \cdot 2 - \frac{M}{a} = 0,$$

звідки

$$X_B = \frac{F}{2} - \frac{M}{2a} = \frac{40}{2} - \frac{30}{2 \cdot 3} = 20 - 5 = 15 \text{ кН}.$$

Відповідь. Горизонтальна складова реакції нерухомого шарніра В дорівнює $X_B = 15$ кН.

1.4 Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв'язання задач статички. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статички для розв'язання задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, можна отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

Розглянемо систему з ідеальними, голономними і утримуючими в'язями, що складається з N матеріальних точок. Згідно з принципом Даламбера в

будь-який момент часу геометрична сума рівнодійних активних сил, реакцій в'язей і сили інерції для кожної матеріальної точки дорівнює нулю:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k^{in} = 0 \quad (k = 1, \dots, N). \quad (1.16)$$

Уявно зафіксуємо час t і надамо системі можливе переміщення $\delta \bar{r}_k$. Помноживши ліві й праві частини рівнянь (1.16) скалярно на $\delta \bar{r}_k$ і підсумовуючи за індексом k , отримаємо:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k^{in} \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (1.17)$$

Згідно з визначенням ідеальних в'язей (1.11), другий доданок рівняння (1.17) дорівнює нулю. Отже,

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k^{in} \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \quad (1.18)$$

або

$$\delta A^a + \delta A^{in} = 0. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.19) (або (1.18)) називається **загальним рівнянням динаміки** (або **принципом Даламбера-Лагранжа**) і формулюється наступним чином: *під час руху системи з ідеальними, голономними і утримуючими в'язями в кожний момент часу сума робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.*

Оскільки сили інерції визначаються за допомогою прискорень точок системи, які, в свою чергу, можна подати як другі похідні за часом радіусів-векторів (або декартових координат) точок, то *загальне рівняння динаміки дозволяє у загальному випадку скласти диференціальні рівняння руху механічної системи.* При цьому реакції ідеальних в'язей не враховуються.

Порівнюючи загальне рівняння динаміки (1.19) із загальним рівнянням статки (1.12), бачимо, що перше з них відрізняється від другого наявністю можливої роботи сил інерції δA^{in} .

Приклад 8. На барабан 1 електричної лебідки масою M_1 і радіусом r намотаний трос з вантажем 2 масою M_2 на його кінці (рис. 1.12, а). До барабана прикладений обертальний момент, що змінюється пропорційно часу $M_{об} = at$, де a – сталий параметр. Визначити кутове прискорення барабана ε_1 , вважаючи барабан однорідним циліндром і нехтуючи масою троса і тертям в осі барабана. Визначити також кутову швидкість барабана $\omega_{1\tau}$ через τ сек від початку руху лебідки із стану спокою.

Розв'язання

Розглянемо механічну систему, що складається з барабана 1 і вантажу 2, пов'язаних між собою тросом. Зобразимо систему у довільному положенні, вважаючи, що напрям обертання барабана визначається обертальним моментом $M_{об}$.

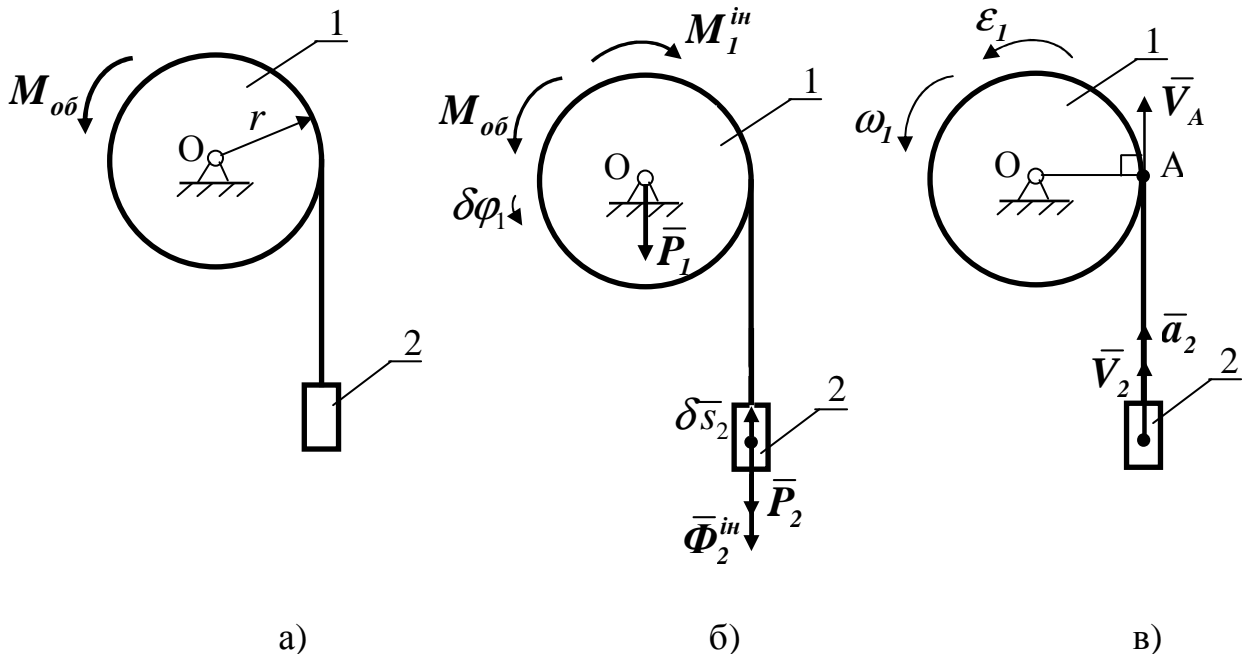


Рисунок 1.12

Покажемо активні сили: сили ваги барабана і вантажу \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , а також пару сил з моментом $M_{об}$ (рис. 1.12, б).

Додамо до активних сил сили інерції. При цьому всі прискорення потрібно виразити через одне, що відповідає запитанню задачі, в даному випадку через ϵ_1 . Співвідношення кінематики зручно встановити спочатку між швидкостями точок і тіл системи (рис. 1.12, в). Оскільки лінійна швидкість вантажу 2, який рухається поступально, дорівнює швидкості точки А на ободі барабана 1, що здійснює обертальний рух, то її можна виразити через кутову швидкість барабана:

$$V_2 = V_A = \omega_1 \cdot AO = \omega_1 \cdot r. \quad (1.20)$$

Диференціюючи (1.20) за часом, отримаємо

$$a_2 = \epsilon_1 \cdot r. \quad (1.21)$$

Покажемо сили інерції. Барабан здійснює обертальний рух навколо осі, що проходить через його центр мас. Тому сили інерції зводяться до пари сил M_1^{in} , що має напрямок, протилежний до кутового прискорення ϵ_1 . Вантаж здійснює

поступальний рух, тому сили інерції зводяться до рівнодійної $\bar{\Phi}_2^{in}$, що протилежна до прискорення \bar{a}_2 (рис. 1.12, б). Модулі пари і сили інерції дорівнюють:

$$M_1^{in} = I_{z1} \varepsilon_1 = \frac{1}{2} M_1 r^2 \varepsilon_1, \quad (1.22)$$

$$\Phi_2^{in} = M_2 a_2 = M_2 \varepsilon_1 r, \quad (1.23)$$

де $I_{z1} = \frac{1}{2} M_1 r^2$ – момент інерції барабана як однорідного циліндра

навколо осі z , що проходить через його центр мас O .

Складемо загальне рівняння динаміки (1.19). Для цього уявно зафіксуємо час і з довільного положення дамо точкам системи можливі переміщення (наприклад, в бік дійсного переміщення точок системи, оскільки в'язі стаціонарні і одне з можливих переміщень буде співпадати з елементарним дійсним переміщенням). Обчислимо можливі роботи активних сил і сил інерції. При цьому всі можливі переміщення слід виразити через одне (наприклад через те, що відповідає запитанню задачі, в даному випадку через можливий кут повороту $\delta\varphi_1$). Співвідношення між можливими переміщеннями можна отримати, наприклад, інтегруючи за часом формулу (1.20): $s_2 = \varphi_1 \cdot r$, і враховуючи, що можливі переміщення пропорційні дійсним елементарним переміщенням, тобто $\delta s_2 = \delta\varphi_1 \cdot r$.

Можливі роботи активних сил і сил інерції дорівнюють:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot 0 = 0 \text{ (оскільки точка прикладення сили } \bar{P}_1 \text{ є нерухомою);}$$

$$\delta A_{P_2} = P_2 \cdot \delta s_2 \cdot \cos 180^\circ = -M_2 g r \cdot \delta\varphi_1;$$

$\delta A_{M_{o\bar{o}}} = M_{o\bar{o}} \cdot \delta\varphi_1$ (знак можливої роботи додатний, оскільки напрями моменту $M_{o\bar{o}}$ і можливого кута повороту $\delta\varphi_1$ співпадають);

$$\delta A_{M_1^{in}} = -M_1^{in} \cdot \delta\varphi_1 = -\frac{1}{2} M_1 r^2 \varepsilon_1 \delta\varphi_1 \text{ (знак можливої роботи від'ємний,}$$

оскільки напрями моменту M_1^{in} і можливого кута повороту $\delta\varphi_1$ протилежні);

$$\delta A_{\Phi_2^{in}} = \Phi_2^{in} \cdot \delta s_2 \cdot \cos 180^\circ = -\Phi_2^{in} r \delta\varphi_1 = -M_2 \varepsilon_1 r^2 \delta\varphi_1.$$

Отже, загальне рівняння динаміки набуде вигляду:

$$-M_2 g r \delta\varphi_1 + M_{o\bar{o}} \delta\varphi_1 - \frac{1}{2} M_1 r^2 \varepsilon_1 \delta\varphi_1 - M_2 \varepsilon_1 r^2 \delta\varphi_1 = 0. \quad (1.24)$$

Зібравши коефіцієнти при $\delta\varphi_1$, отримаємо

$$(-M_2gr + M_{об} - \frac{1}{2}M_1r^2\varepsilon_1 - M_2\varepsilon_1r^2) \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Оскільки можливий кут повороту $\delta\varphi_1$ довільний ($\delta\varphi_1 \neq 0$), то остання рівність буде виконуватись, коли вираз у дужках дорівнює нулю:

$$-M_2gr + M_{об} - \frac{1}{2}M_1r^2\varepsilon_1 - M_2\varepsilon_1r^2 = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно ε_1 , отримаємо відповідь на перше питання задачі:

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{об} - M_2gr}{(\frac{1}{2}M_1 + M_2)r^2} = \frac{2(at - M_2gr)}{(M_1 + 2M_2)r^2}. \quad (1.25)$$

Для відповіді на друге запитання задачі зінтегруємо за часом рівняння (1.25):

$$\omega_1 = \frac{2(a\frac{t^2}{2} - M_2grt)}{(M_1 + 2M_2)r^2} + C_1 = \frac{at^2 - 2M_2grt}{(M_1 + 2M_2)r^2} + C_1, \quad (1.26)$$

де C_1 – стала інтегрування, що визначається початковими умовами. Рух лебідки починається із стану спокою, тому $\omega_1|_{t=0} = 0$. Підставляючи початкову умову у рівняння (1.26), отримаємо

$$0 = 0 + C_1,$$

звідки $C_1 = 0$ і рівняння (1.26) набуде вигляду:

$$\omega_1 = \frac{at^2 - 2M_2grt}{(M_1 + 2M_2)r^2}.$$

Тоді кутова швидкість барабана $\omega_{1\tau}$ через τ сек від початку руху дорівнюватиме

$$\omega_{1\tau} = \frac{a\tau^2 - 2M_2gr\tau}{(M_1 + 2M_2)r^2}. \quad (1.27)$$

Відповідь. Кутове прискорення і кутова швидкість барабана через τ сек від початку руху визначаються формулами (1.25) і (1.27).

Приклад 9.

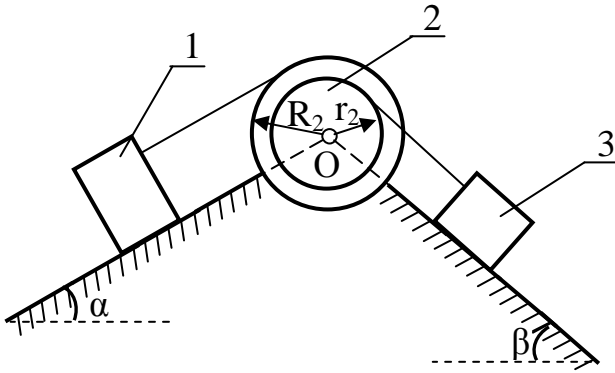


Рисунок 1.13

На гладкій похилій площині (кут $\alpha = 30^\circ$) лежить вантаж 1 масою $M_1 = 4m$, який прикріплений до тросу, що намотаний на зовнішній радіус R_2 нерухомого блока 2 складної форми (рис. 1.13). Вантаж 3 масою $M_3 = 2m$, що знаходиться на гладкій похилій площині (кут $\beta = 45^\circ$),

прикріплений до другого тросу, який намотаний на внутрішній радіус r_2 блока 2. Маса блока 2 дорівнює $M_2 = 3m$, радіуси $R_2 = 2r$, $r_2 = r$, радіус інерції блока щодо горизонтальної осі z , яка проходить через його центр мас O , дорівнює $i_{2z} = 1,6r$. При русі механічної системи на блок 2 діє пара сил опору $M_{on} = 0,2mgr$ (Н·м). Масою тросів зневажити. Визначити прискорення вантажу 1.

Розв'язання

Розглянемо механічну систему, що складається з вантажів 1, 3 і блока 2, пов'язаних між собою двома тросами. Зобразимо систему у довільному положенні, вважаючи, що вантаж 1 рухається вниз по похилій площині під дією сили тяжіння.

Покажемо активні сили: сили ваги вантажів і блока \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , \bar{P}_3 , а також пару сил опору з моментом M_{on} (рис. 1.14, а).

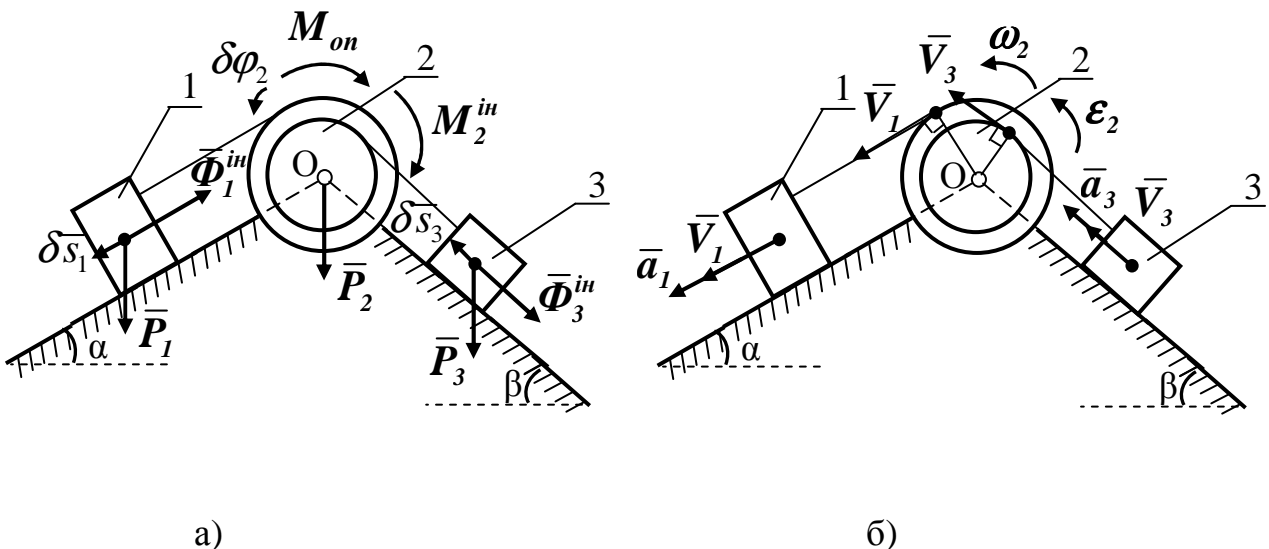


Рисунок 1.14

Додамо до активних сил сили інерції. При цьому всі прискорення потрібно виразити через одне, що відповідає запитанню задачі, в даному випадку через a_1 . Співвідношення кінематики зручно встановити спочатку між швидкостями точок і тіл системи (рис. 1.14, б). Лінійні швидкості точок тросу, що зв'язує вантаж 1 і блок 2, однакові і дорівнюють швидкості вантажу V_1 . Тому кутова швидкість блоку 2, що здійснює обертальний рух (точка О – нерухома), дорівнює

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}. \quad (1.28)$$

Лінійні швидкості точок другого тросу, що зв'язує вантаж 3 і блок 2, також однакові і дорівнюють швидкості вантажу V_3 . Тому, розглядаючи обертальний рух блоку 2, можна записати

$$V_3 = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{V_1}{R_2} \cdot r_2 = \frac{V_1}{2r} \cdot r = \frac{V_1}{2}. \quad (1.29)$$

Диференціюючи (1.28) і (1.29) за часом, отримаємо

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{2}. \quad (1.30)$$

Покажемо сили інерції. Вантажі здійснюють поступальний рух, тому їх сили інерції зводяться до рівнодійних $\bar{\Phi}_1^{in}$ і $\bar{\Phi}_3^{in}$, що протилежні до відповідних прискорень \bar{a}_1 і \bar{a}_3 . Блок 2 здійснює обертальний рух навколо осі, що проходить через його центр мас. Тому сили інерції зводяться до пари сил M_2^{in} , що має напрямок, протилежний до кутового прискорення ε_2 (рис. 1.14,а). Модулі сил і пари сил інерції, з урахуванням співвідношень (1.30), дорівнюють:

$$\Phi_1^{in} = M_1 a_1, \quad (1.31)$$

$$M_2^{in} = I_{z2} \varepsilon_2 = M_2 i_{2z}^2 \frac{a_1}{R_2}, \quad (1.32)$$

$$\Phi_3^{in} = M_3 a_3 = M_3 \frac{a_1}{2}, \quad (1.33)$$

де $I_{z2} = M_2 i_{2z}^2$ – момент інерції блоку як тіла складної форми навколо осі z , що проходить через його центр мас О.

Складемо загальне рівняння динаміки (1.19). Для цього уявно зафіксуємо час і з довільного положення дамо точкам системи можливі переміщення (наприклад, в бік дійсного переміщення точок системи, оскільки в'язі стаціонарні і одне з можливих переміщень буде співпадати з елементарним

дійсним переміщенням). Обчислимо можливі роботи активних сил і сил інерції. При цьому всі можливі переміщення слід виразити через одне (наприклад через те, що відповідає запитанню задачі, в даному випадку через можливе переміщення δs_1). Співвідношення між можливими переміщеннями можна

отримати, наприклад, інтегруючи за часом формули (1.28), (1.29): $\varphi_2 = \frac{s_1}{R_2}$,

$s_3 = \frac{s_1}{2}$, і враховуючи, що можливі переміщення пропорційні дійсним

елементарним переміщенням, тобто $\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R_2}$, $\delta s_3 = \frac{\delta s_1}{2}$.

Можливі роботи активних сил і сил інерції дорівнюють:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \delta s_1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = M_1 g \sin \alpha \cdot \delta s_1;$$

$$\delta A_{P_2} = P_2 \cdot 0 = 0 \text{ (оскільки точка прикладення сили } \bar{P}_2 \text{ є нерухомою);}$$

$$\delta A_{P_3} = P_3 \cdot \delta s_3 \cdot \cos(90^\circ + \beta) = -M_3 g \sin \beta \cdot \delta s_3 = -\frac{1}{2} M_3 g \sin \beta \cdot \delta s_1;$$

$$\delta A_{M_{on}} = -M_{on} \cdot \delta\varphi_2 = -M_{on} \frac{\delta s_1}{R_2} \text{ (знак можливої роботи від'ємний,}$$

оскільки напрями моменту M_{on} і можливого кута повороту $\delta\varphi_2$ протилежні);

$$\delta A_{\Phi_1^{ih}} = \Phi_1^{ih} \cdot \delta s_1 \cdot \cos 180^\circ = -\Phi_1^{ih} \delta s_1 = -M_1 a_1 \delta s_1;$$

$$\delta A_{M_2^{ih}} = -M_2^{ih} \cdot \delta\varphi_2 = -M_2 i_{2z}^2 \frac{a_1}{R_2} \frac{\delta s_1}{R_2} = -M_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} a_1 \delta s_1 \text{ (знак можливої}$$

роботи від'ємний, оскільки напрями моменту M_2^{ih} і можливого кута повороту $\delta\varphi_2$ протилежні);

$$\delta A_{\Phi_3^{ih}} = \Phi_3^{ih} \cdot \delta s_3 \cdot \cos 180^\circ = -M_3 \frac{a_1}{2} \frac{\delta s_1}{2} = -\frac{1}{4} M_3 a_1 \delta s_1.$$

Отже, загальне рівняння динаміки набуде вигляду

$$\begin{aligned} M_1 g \sin \alpha \cdot \delta s_1 - \frac{1}{2} M_3 g \sin \beta \cdot \delta s_1 - M_{on} \frac{\delta s_1}{R_2} - M_1 a_1 \delta s_1 - \\ - M_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} a_1 \delta s_1 - \frac{1}{4} M_3 a_1 \delta s_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Зібравши коефіцієнти при δs_1 , отримаємо

$$(M_1 g \sin \alpha - \frac{1}{2} M_3 g \sin \beta - \frac{M_{on}}{R_2} - M_1 a_1 - M_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} a_1 - \frac{1}{4} M_3 a_1) \cdot \delta s_1 = 0.$$

Оскільки можливе переміщення δs_1 довільне ($\delta s_1 \neq 0$), то остання рівність буде виконуватись, коли вираз у дужках дорівнює нулю:

$$M_1 g \sin \alpha - \frac{1}{2} M_3 g \sin \beta - \frac{M_{on}}{R_2} - M_1 a_1 - M_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} a_1 - \frac{1}{4} M_3 a_1 = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно a_1 , отримаємо відповідь на запитання задачі:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{M_1 g \sin \alpha - \frac{1}{2} M_3 g \sin \beta - \frac{M_{on}}{R_2}}{M_1 + M_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + \frac{1}{4} M_3} = \\ &= \frac{4mg \sin \alpha - \frac{1}{2} 2mg \sin \beta - \frac{0,2mgr}{2r}}{4m + 3m \frac{2,56r^2}{4r^2} + \frac{1}{4} 2m} = \frac{mg(4 \sin \alpha - \sin \beta - 0,1)}{m(4 + \frac{7,68}{4} + \frac{1}{2})} = \\ &= \frac{10 \cdot (4 \cdot 0,5 - 0,7 - 0,1)}{4 + 1,92 + 0,5} = \frac{12}{6,42} = 1,87 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Відповідь. Прискорення вантажу $a_1 = 1,87 \text{ м/с}^2$.

Питання для самоконтролю

1. Що в аналітичній механіці називається в'язями?
2. Який вигляд має рівняння в'язі?
3. Дайте означення стаціонарним в'язям.
4. Дайте означення голономним в'язям.
5. Дайте означення утримуючим в'язям.
6. Дайте означення ідеальним в'язям. Наведіть приклади.
7. Що називається можливим переміщенням точки і механічної системи?
8. Чим відрізняються дійсні і можливі переміщення точки?
9. Що називається можливою роботою сили? Як визначається можлива робота пари сил?
10. Сформулюйте принцип можливих переміщень. Що встановлює цей принцип?

11. Як за допомогою принципу можливих переміщень можна визначити реакцію ідеальної в'язі?
12. Сформулюйте принцип Даламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки). Що дозволяє складати цей принцип?
13. Яким чином враховуються неідеальні в'язі при застосуванні принципів можливих переміщень і Даламбера-Лагранжа?

2 Рівняння рівноваги і руху механічної системи в узагальнених координатах

2.1 Число степенів вільності. Узагальнені координати й узагальнені швидкості

У загальному випадку система може мати безліч різних можливих переміщень. Проте можна вказати деяке число таких незалежних між собою можливих переміщень, що усяке інше переміщення може бути через них виражено. Наприклад, для точки, що може рухатись у площині, будь-яке можливе переміщення може бути виражено як $\delta \vec{r} = a \cdot \delta \bar{x} + b \cdot \delta \bar{y}$, де $\delta \bar{x}, \delta \bar{y}$ – можливі переміщення уздовж осей x, y відповідно, a, b – певні числа. У цьому випадку число незалежних можливих переміщень дорівнює двом.

Число незалежних між собою можливих переміщень механічної системи називається **числом степенів вільності**.

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок. В інерціальній системі відліку $Oxyz$ положення кожної точки визначається трьома декартовими координатами x_k, y_k, z_k , а положення усіх точок – $3N$ координатами. Припустимо, що рух системи обмежений h ідеальними, голономними і утримуючими в'язями:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Оскільки $3N$ координат задовольняють h рівнянням в'язей, то вони не є незалежними. Очевидно, число незалежних координат, що визначають положення системи, буде $s = 3N - h$.

При розв'язанні багатьох задач механіки невіільних систем можна добитись значних спрощень, якщо положення системи визначати за допомогою s яких-небудь незалежних параметрів. При цьому рівняння голономних в'язей задовольняються автоматично і зникає потреба враховувати їх при розв'язанні

задач. Незалежні між собою параметри q_1, \dots, q_s , що однозначно визначають положення механічної системи, називаються **узагальненими координатами**.

Для систем з голономними в'язями *число узагальнених координат дорівнює числу степенів вільності*.

Узагальнені координати можуть мати різні геометричні й механічні змісти. Це можуть бути деякі незалежні декартові координати, лінійні переміщення, кути повороту тощо. У суміжних розділах механіки, наприклад, у теорії пружності роль узагальнених координат виконують переміщення точок пружного тіла, деформації і напруження, прогин балок і пластин, у гідродинаміці – густина, температура або швидкості точок суцільного середовища.

Похідна за часом від узагальненої координати називається **узагальненою швидкістю**:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.1)$$

Фізичний зміст узагальнених координат і швидкостей можна встановити на конкретних прикладах.

Приклад 1. Якщо узагальнена координата $q = \varphi$ – кут повороту, то $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ – кутова швидкість.

Приклад 2. Якщо $q = s$ – лінійне переміщення, то $\dot{q} = \dot{s} = V$ – лінійна швидкість.

Приклад 3. У випадку, якщо $q_1 = x$, $q_2 = y$ – декартові координати, то $\dot{q}_1 = \dot{x} = V_x$, $\dot{q}_2 = \dot{y} = V_y$ – проекції швидкості на осі координат.

2.2 Узагальнені сили і способи їх визначення

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок, на яку діють активні сили $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$. Її положення будемо визначати за допомогою s узагальнених координат q_1, \dots, q_s . Оскільки положення точок системи визначаються за допомогою їх радіусів-векторів \bar{r}_k , то останні можна виразити через узагальнені координати і час:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.2)$$

Ці N векторних рівнянь еквівалентні $3N$ скалярним рівнянням

$$\begin{aligned}x_k &= x_k(q_1, \dots, q_s, t), \\y_k &= y_k(q_1, \dots, q_s, t), \\z_k &= z_k(q_1, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, \dots, N).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Виразимо варіацію радіусів-вектора $\delta \bar{r}_k$ через варіації узагальнених координат $\delta q_1, \dots, \delta q_s$, беручи до уваги, що варіації визначаються при фіксованому часі ($\delta t = 0$):

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j.\tag{2.4}$$

Обчислимо можливу роботу активних сил системи:

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \right),$$

або, змінюючи порядок підсумовування, отримаємо

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j.\tag{2.5}$$

Введемо позначення

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.\tag{2.6}$$

Тоді рівність (2.5) набуде вигляду

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s.\tag{2.7}$$

Множник Q_j при варіації узагальненої координати δq_j у виразі можливої роботи активних сил системи δA^a називається **узагальненою силою**, що відповідає узагальненій координаті q_j .

Розмірність узагальненої сили може бути різною і, як впливає з рівняння (2.7), залежить від розмірності узагальненої координати. Наприклад, якщо узагальнена координата є лінійним переміщенням, то розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю сили. Якщо ж узагальнена координата є кутом повороту, то розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю моменту сили.

Наведемо три способи обчислення узагальненої сили.

Спосіб 1. Узагальнену силу можна визначити безпосередньо за формулою (2.6), яку можна подати у скалярній формі

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad (2.8)$$

тобто через проекції активних сил на осі декартової системи координат. При цьому треба отримати залежності декартових координат точок прикладення сил від узагальнених координат. Цей спосіб можна використовувати для механічної системи, що складається з невеликої кількості точок.

Спосіб 2. Для визначення узагальненої сили можна скористатись формулою (2.7), враховуючи, що можливі переміщення довільні й незалежні. Щоб знайти узагальнену силу, наприклад Q_1 , надамо системі таке можливе переміщення, при якому всі варіації узагальнених координат, крім δq_1 , дорівнюють нулю:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0.$$

Обчислимо на цьому переміщенні можливу роботу всіх активних сил, що прикладені до системи. На підставі формули (2.7) матимемо:

$$\delta A^a = Q_1 \cdot \delta q_1.$$

Множник Q_1 при варіації узагальненої координати δq_1 буде першою узагальненою силою.

Аналогічно поступають при визначенні всіх інших узагальнених сил Q_2, Q_3, \dots, Q_s . Цей спосіб є найбільш універсальним.

Спосіб 3. Цей спосіб застосовують тільки для консервативних сил. Сили називаються **консервативними** (або **потенціальними**), якщо: 1) вони залежать тільки від положення точок системи; 2) їх робота на переміщенні системи з початкового положення у кінцеве не залежить від шляху, по якому здійснюється це переміщення. Для консервативних сил мають виконуватись умови:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad (2.9)$$

де $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$ – **потенціальна енергія** силового поля, що є функцією координат точок системи і визначається як робота

консервативних сил при переміщенні системи із даного положення M в нульове M_0 (те положення, де потенціальна енергія приймається рівною нулю $\Pi = 0$):

$$\Pi = A_{MM_0} . \quad (2.10)$$

Приклади консервативних сил.

1. Сила ваги $P = mg$. Потенціальна енергія визначається за формулою

$$\Pi_P = mg(z - z_0) , \quad (2.11)$$

де z, z_0 – вертикальні координати даного і нульового положень точки прикладення сили ваги (за умови напрямлення осі z вертикально уверх). З формули (2.11) випливає, що потенціальна енергія сили ваги додатна $\Pi_P > 0$, якщо дане положення знаходиться вище за нульове ($z > z_0$), від’ємна $\Pi_P < 0$, якщо дане положення нижче за нульове ($z < z_0$), і дорівнює нулю $\Pi_P = 0$, якщо дане положення і нульове знаходяться на одному рівні за висотою.

2. Сила пружності пружини $F_{np} = c\lambda$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, λ – деформація пружини (зміна її довжини по відношенню до ненапруженої пружини). Потенціальна енергія визначається за формулою:

$$\Pi_{F_{np}} = \frac{c}{2} \cdot (\lambda^2 - \lambda_0^2) , \quad (2.12)$$

де λ, λ_0 – деформації пружини у даному й нульовому положеннях.

Підставимо далі формули (2.9) у формулу (2.8), тоді

$$Q_j = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) .$$

Коли взяти до уваги, що потенціальна енергія, яка залежить від декартових координат точок системи, є складною функцією узагальнених координат, то останню формулу можна записати у наступному вигляді:

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s) . \quad (2.13)$$

Таким чином, узагальнені сили консервативної системи дорівнюють взятим зі знаком мінус частинним похідним потенціальної енергії системи за відповідними узагальненими координатами.

Приклад 4. Визначити узагальнену силу математичного маятника, що складається з ідеального стержня ОМ довжиною l і матеріальної точки М масою m (рис. 2.1).

Розв'язання

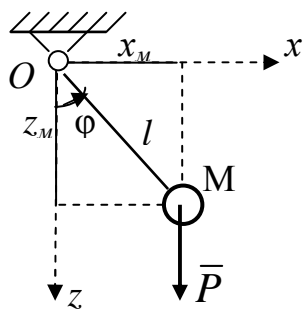


Рисунок 2.1

Будемо визначати положення точки М за допомогою кута φ відхилення стержня ОМ від вертикалі. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут повороту стержня $q = \varphi$. Зобразимо точку М у довільному положенні при коливаннях маятника. На точку М діє тільки сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$.

Розглянемо три способи визначення узагальненої сили.

Спосіб 1. Помістимо початок декартової системи координат у точку закріплення маятника (рис. 2.1). Визначимо проекції сили ваги на осі координат і виразимо декартові координати точки її прикладення через узагальнену координату φ :

$$P_x = 0, P_z = P = mg, x_M = l \cdot \sin \varphi, z_M = l \cdot \cos \varphi.$$

Обчислимо далі частинні похідні

$$\frac{\partial x_M}{\partial \varphi} = l \cdot \cos \varphi, \quad \frac{\partial z_M}{\partial \varphi} = -l \cdot \sin \varphi.$$

Формула (2.8) у цьому разі набуває вигляду

$$Q_\varphi = P_x \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \varphi} + P_z \cdot \frac{\partial z_M}{\partial \varphi} = 0 + mg \cdot (-l \cdot \sin \varphi) = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

Спосіб 2. Зафіксуємо час t і надамо системі можливе переміщення $\delta\varphi$,

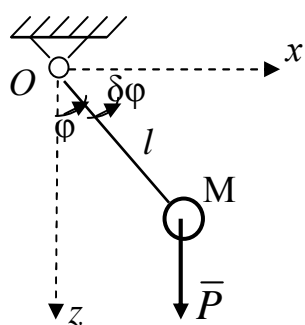


Рисунок 2.2

наприклад, у бік відліку узагальненої координати φ , тобто повернемо стержень ОМ на малий кут $\delta\varphi$ (рис. 2.2). Обчислимо можливу роботу сили ваги як добуток її моменту відносно точки О на можливе переміщення $\delta\varphi$. Добуток буде від'ємний, оскільки напрями моменту сили \bar{P} і можливого кута повороту стержня $\delta\varphi$ не збігаються:

$$\delta A = -|M_o(\bar{P})| \cdot \delta\varphi = -P \cdot (l \cdot \sin \varphi) \cdot \delta\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Множник $Q_\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi$ при варіації узагальненої координати $\delta\varphi$ і буде узагальненою силою, що відповідає узагальненій координаті φ .

Спосіб 3. Враховуючи, що діюча на точку М сила ваги \bar{P} консервативна, визначимо потенціальну енергію системи. За нульове приймемо положення

маятника у стані спокою OM_0 (рис. 2.3). Різниця висот між розглядуваним M і нульовим M_0 положеннями дорівнює

$$z - z_0 = OM_0 - OK = l - l \cdot \cos \varphi = l \cdot (1 - \cos \varphi).$$

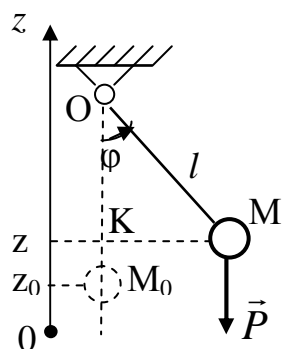


Рисунок 2.3

Обчислимо потенціальну енергію системи, використовуючи формули (2.10), (2.11):

$$\Pi = \Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Узагальнена сила, відповідно до формули (2.13), буде

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

2.3 Рівняння рівноваги механічної системи в узагальнених координатах

Будемо визначати положення механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними й утримуючими в'язями з s степенями вільності узагальненими координатами q_1, \dots, q_s . Згідно з принципом можливих переміщень, при рівновазі системи за умови нульових початкових швидкостей її точок виконується рівність (1.12), яку з урахуванням формули (2.7) можна записати як

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s = 0. \quad (2.14)$$

Оскільки варіації узагальнених координат незалежні й довільні при голономних в'язях, то для виконання рівності (2.14) усі коефіцієнти при δq_j мають дорівнювати нулю. Дійсно, припустимо, що $\delta q_1 \neq 0$, а решта варіацій дорівнює нулю: $\delta q_2 = \dots = \delta q_s = 0$. Тоді з (2.14) випливає, що $\delta A^a = Q_1 \cdot \delta q_1 = 0$. Оскільки $\delta q_1 \neq 0$, то повинен дорівнювати нулю множник $Q_1 = 0$. Аналогічно можна довести, що множники при всіх інших варіаціях узагальнених координат дорівнюють нулю. Отже, у стані рівноваги механічної системи мають виконуватись рівності

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (2.15)$$

Рівності (2.15) виражають **умови рівноваги невідільної механічної системи в узагальнених координатах**: для рівноваги невідільної механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними й утримуючими в'язями

необхідно і достатньо, щоб усі узагальнені сили дорівнювали нулю (при нульових початкових швидкостях усіх точок системи).

Якщо всі активні сили, що діють на механічну систему, є консервативними, то рівняння (2.15) з урахуванням (2.13) набувають вигляду

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (2.16)$$

2.4 Диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду)

Як було зазначено у п. 1.4, загальне рівняння динаміки дозволяє скласти диференціальні рівняння руху механічної системи, що не містять реакції ідеальних в'язей. Для досить простих систем застосування цього рівняння цілком виправдане. Але для складних систем застосування загального рівняння динаміки призводить до відносно громіздких перетворень. У цих випадках зручніше користуватися рівняннями Лагранжа другого роду, які отримують перетворенням загального рівняння динаміки до узагальнених координат.

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок, на яку діють активні сили $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$. Її положення будемо визначати за допомогою s узагальнених координат q_1, \dots, q_s . Зважаючи на визначення сили інерції матеріальної точки $\bar{\Phi}^{in} = -m\bar{a}$, загальне рівняння динаміки (1.18) можна записати у вигляді:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m\bar{a}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (2.17)$$

Підставимо формулу для варіації радіуса-вектора k -ї точки системи (2.4) у рівняння (2.17):

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m\bar{a}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = 0.$$

Змінімо порядок підсумовування:

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^N [(\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0.$$

Далі розіб'ємо суму на дві частини і замінимо $\bar{a}_k = \ddot{\bar{r}}_k$:

$$\sum_{j=1}^s [\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0.$$

Користуючись виразом для узагальнених сил (2.6) у векторній формі, матимемо

$$\sum_{j=1}^s [Q_j - \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0. \quad (2.18)$$

Розглянемо деякі математичні перетворення:

1) здиференціюємо рівняння (2.2) за часом:

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.19)$$

Взявши частинні похідні від лівої і правої частин рівняння (2.19) за узагальненою швидкістю \dot{q}_j , отримаємо співвідношення

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}; \quad (2.20)$$

2) знайдемо частинну похідну рівняння (2.19) за узагальненою координатою q_j :

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j} \cdot \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_s \partial q_j} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_j}. \quad (2.21)$$

Також здиференціюємо за часом вираз $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ як складну функцію змінних

q_1, \dots, q_s , а також часу t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_s} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial t}. \quad (2.22)$$

Порівнюючи вирази (2.21), (2.22) і зважаючи на те, що змішані частинні похідні не залежать від порядку диференціювання, отримаємо рівність

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}. \quad (2.23)$$

Складемо тепер вираз кінетичної енергії системи:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot \dot{\bar{r}}_k^2. \quad (2.24)$$

Знайдемо деякі похідні від кінетичної енергії:

$$\text{a)} \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot 2\dot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial q_j}; \quad (2.25)$$

$$\text{б)} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot 2\dot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{r}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (2.26)$$

де при отриманні останньої рівності у формулі (2.26) враховані співвідношення (2.20);

$$\text{в)} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{r}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial q_j}, \quad (2.27)$$

де при отриманні останньої суми у формулі (2.27) враховані співвідношення (2.23).

Різниця між формулами (2.27) і (2.25) буде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{r}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (2.28)$$

оскільки друга сума правої частини (2.27) дорівнює правій частині (2.25).

Таким чином, загальне рівняння динаміки (2.18) з урахуванням (2.28) можна записати так:

$$\sum_{j=1}^s [Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0. \quad (2.29)$$

Остання рівність виконується лише тоді, коли коефіцієнти при довільних значеннях незалежних варіацій δq_j дорівнюють нулю. Це можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, s), \quad (2.30)$$

які називаються **рівняннями Лагранжа другого роду** і читаються наступним чином: *різниця між повною похідною за часом від частинної похідної кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю і частинною похідною кінетичної енергії системи за узагальненою координатою дорівнює відповідній узагальненій силі.*

Рівняння (2.30) – це система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат $q_j(t)$, які є невідомими функціями часу і являють собою закон руху системи. Таким чином, *рівняннями Лагранжа другого роду дозволяють складати диференціальні рівняння руху механічної системи.*

Відмітимо деякі особливості рівнянь Лагранжа.

1. Кількість рівнянь (2.30) дорівнює числу степенів вільності, тобто їх найменшій можливій кількості для голономних систем. З цього погляду метод Лагранжа є найбільш економічним.
2. Форма запису рівнянь (2.30) не залежить від конкретного вибору узагальнених координат і дозволяє скласти єдину послідовність дій, яку треба виконати при розв'язанні задачі динаміки. Це робить метод Лагранжа достатньо універсальним.
3. Метод Лагранжа є, по суті, енергетичним, оскільки потребує складання кінетичної енергії системи і робіт активних сил. Ця обставина дозволяє використовувати метод Лагранжа для аналізу не тільки механічних, а також інших фізичних систем.
4. Рівняння (2.30) не містять реакцій ідеальних в'язей. Це дозволяє відділити задачу встановлення руху невідомої системи від задачі визначення невідомих реакцій в'язей.

Зауваження. Для систем з утримуючими й ідеальними в'язями рівняння Лагранжа другого роду повністю розв'язують задачу про визначення закону її руху. Для систем з неутримуючими або неідеальними в'язями рівнянь (2.30) може бути недостатньо, що потребує складання додаткових рівнянь [3, 10, 12].

2.5 Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем

Якщо всі активні сили, що діють на механічну систему, є консервативними, то рівняння (2.30) з урахуванням (2.13) набудуть вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.31)$$

Оскільки потенціальна енергія системи $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_s)$ є функцією лише узагальнених координат і від узагальнених швидкостей не залежить, то її частинні похідні за узагальненими швидкостями дорівнюють нулю: $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$.

Тоді рівняння (2.31) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.32)$$

Введемо у розгляд функцію $L = T - \Pi$. Функція L від узагальнених координат і швидкостей, яка дорівнює різниці між кінетичною і потенціальною

енергіями, називається *функцією Лагранжа*, або *кінетичним потенціалом* системи. У цьому разі система рівнянь (2.32) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.33)$$

Рівняння (2.33) називаються *рівняннями Лагранжа другого роду для консервативних систем*. З рівнянь (2.33) випливає, що рух консервативної системи визначається завданням тільки однієї функції – функції Лагранжа L .

Зауважимо, що саме форма (2.33) рівнянь Лагранжа використовується в різних розділах теоретичної фізики і ряді прикладних наук (гідродинаміці, теорії пружності, електротехніці, радіотехніці тощо).

2.6 Методика розв’язання задач динаміки з використанням рівнянь Лагранжа другого роду

При застосуванні рівнянь Лагранжа другого роду треба дотримуватися наступної послідовності дій [2, 3, 6, 7, 10, 12].

1. Зобразити механічну систему в довільному положенні під час її руху, визначити число степенів її вільності, вибрати узагальнені координати й записати рівняння Лагранжа (2.30).

2. Зобразити активні сили й реакції неідеальних в’язей.

3. Визначити кінетичну енергію системи. При цьому всі лінійні й кутові швидкості виразити через узагальнені швидкості, використовуючи співвідношення кінематики.

4. Визначити узагальнені сили за одним із способів, наведених у п. 2.2.

5. Обчислити похідні кінетичної енергії $\frac{\partial T}{\partial q_j}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$ і скласти

рівняння Лагранжа (2.30), тобто диференціальні рівняння руху системи.

6. Визначити шукані параметри. При цьому, якщо для розв’язання задачі потрібно знайти рівняння руху системи, отримані диференціальні рівняння необхідно зінтегрувати з урахуванням початкових умов руху.

Приклад 5. Скласти диференціальне рівняння коливань математичного маятника (рис. 2.4) за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Розв'язання

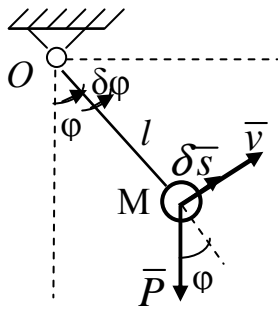


Рисунок 2.4

1. Зобразимо систему, що складається з ідеального стержня OM і матеріальної точки M , в довільному положенні при коливаннях у вертикальній площині. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут відхилення стержня OM від вертикалі $q = \varphi$. Рівняння Лагранжа (2.30) з урахуванням вибраної узагальної координати набуде вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (2.34)$$

2. На матеріальну точку M діє тільки одна активна сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$.

3. Визначимо кінетичну енергію математичного маятника: $T = \frac{mv^2}{2}$.

Модуль лінійної швидкості v виразимо через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega$ (кутову швидкість обертання стержня OM): $v = \omega l = \dot{\varphi} l$. Тоді отримаємо

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{\varphi} l)^2}{2} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2. \quad (2.35)$$

4. Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті φ , знайдена для математичного маятника у прикладі 4 п. 2.2. Проте, продемонструємо ще один варіант застосування способу 2 п.2.2, що базується на визначенні можливої роботи сили ваги \bar{P} за формулою (1.9):

$$\delta A_p = \bar{P} \cdot \delta \bar{s} = P \cdot \delta s \cdot \cos(90 + \varphi), \quad (2.36)$$

де можливе переміщення δs точки M (точки прикладення сили ваги) має бути виражено через можливий кут повороту стержня $\delta \varphi$. Для систем із стаціонарними в'язями можливі переміщення пропорційні відповідним швидкостям, отже маємо $\delta s = \delta \varphi \cdot l$. Тоді вираз можливої роботи (2.36) з урахуванням формули зведення тригонометричних функцій $\cos(90 + \varphi) = -\sin \varphi$ набере вигляду

$$\delta A_p = -mgl \sin \varphi \cdot \delta \varphi,$$

звідки узагальнена сила буде

$$Q_{\varphi} = -mgl \cdot \sin \varphi. \quad (2.37)$$

5. Обчислимо похідні кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{оскільки узагальнена координата } \varphi \text{ явно не входить до}$$

кінетичної енергії T);

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m l^2 \cdot 2 \dot{\varphi} = m l^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m l^2 \ddot{\varphi}.$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду (2.34):

$$m l^2 \ddot{\varphi} - 0 = -m g l \cdot \sin \varphi \quad (2.38)$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0. \quad (2.39)$$

Рівняння (2.39) є диференціальним рівнянням руху (коливань) математичного маятника. Зазначимо, що це рівняння є нелінійним. У разі малих коливань, коли $\sin \varphi \approx \varphi$, останнє рівняння набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0. \quad (2.40)$$

Приклад 6.

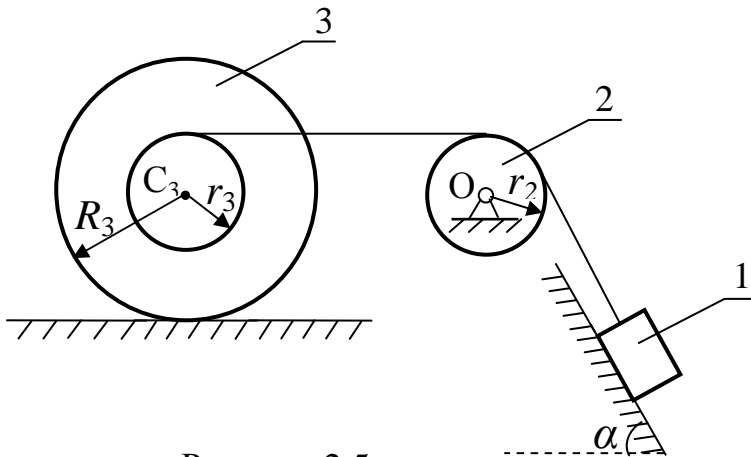


Рисунок 2.5

На похилій площині (кут $\alpha = 60^\circ$) лежить вантаж 1 масою $M_1 = 4m$, який прикріплений до кінця нитки (рис. 2.5). Нитка перекинута через блок 2 масою $M_2 = 1,5m$ і наведена на вісь котушки 3 радіусом $r_3 = r$. При русі вантажу по похилій площині вниз

котушка 3 масою $M_3 = 20m$ і радіусом $R_3 = 3r$ котиться без ковзання по горизонтальній площині вправо. Радіус інерції котушки щодо осі, яка проходить через її центр мас, дорівнює $i_{3z} = 4r$. Блок 2 радіусом r_2 вважати суцільним циліндром. Масою нитки зневажити. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу по похилій площині $f = 0,2$. Коефіцієнт тертя кочення котушки 3 по горизонтальній площині $f_k = 0,4$ см. Параметр $r = 2$ см. Визначити прискорення вантажу 1.

Розв'язання

1. Розглянемо механічну систему, що складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних нерозтяжною ниткою. Зобразимо систему в довільному положенні, вважаючи, що вантаж 1 рухається під дією власної сили ваги (рис. 2.6). Система має один степінь вільності (оскільки для повної зупинки системи достатньо уявно зупинити одну будь-яку точку цієї системи). Виберемо як узагальнену координату переміщення вантажу 1 униз по похилій площині

$$q = S_1. \quad (2.41)$$

Тоді узагальненою швидкістю буде лінійна швидкість вантажу 1

$$\dot{q} = V_1 = \dot{S}_1. \quad (2.42)$$

Рівняння Лагранжа другого ряду для механічної системи з урахуванням вибраної узагальненої координати матиме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_{S_1}. \quad (2.43)$$

2. Покажемо активні сили, що прикладені до системи. $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ - сили ваги 1, 2, 3 тіл. Оскільки похила і горизонтальна площини не є ідеальними в'язями (є тертя ковзання і тертя кочення), то включимо силу тертя ковзання вантажу 1 \bar{F}_{mp1} і пару сил тертя кочення котушки 3 M_{mk3} до активних сил. Реакції ідеальних в'язей на рисунку не показуємо.

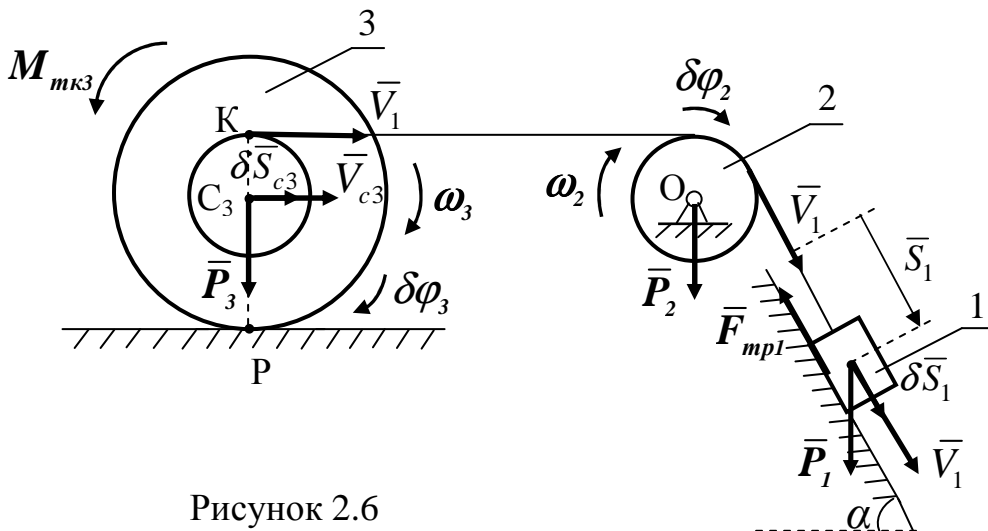


Рисунок 2.6

3. Обчислимо кінетичну енергію механічної системи в довільному положенні. При цьому усі лінійні і кутові швидкості, що входять у вираження для кінетичних енергій тіл системи, виразимо через узагальнену швидкість $\dot{S} = V_1$.

Кінетична енергія системи в довільному положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять у систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2.44)$$

Вантаж 1 рухається поступально, тому його кінетична енергія визначається за формулою

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2. \quad (2.45)$$

Блок 2 робить обертальний рух, його кінетична енергія дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{z_2} \omega_2^2. \quad (2.46)$$

Так як блок 2 являє собою суцільний циліндр, то його момент інерції

$$J_{z_2} = \frac{1}{2} M_2 r_2^2. \quad (2.47)$$

Оскільки швидкість точки нитки на ободі блоку 2 дорівнює швидкості вантажу 1, то кутова швидкість блоку

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}. \quad (2.48)$$

Підставляючи (2.48) і (2.47) у (2.46), одержимо

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{z_2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} M_2 V_1^2. \quad (2.49)$$

Котушка 3 здійснює плоскопаралельний рух, її кінетична енергія дорівнює

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_{c3}^2 + \frac{1}{2} J_{zc_3} \omega_3^2. \quad (2.50)$$

Так як за умовою задачі відомий радіус інерції i_{3z} , то катушку вважаємо тілом складної форми і її момент інерції визначаємо за формулою

$$J_{zc_3} = M_3 i_{3z}^2 = M_3 \cdot 16 \cdot r^2. \quad (2.51)$$

При коченні катушки без ковзання миттєвий центр швидкостей розташований у точці P торкання катушки з горизонтальною площиною.

Модуль швидкості точки K котушки дорівнює модулю швидкості вантажу 1, тому що вони з'єднані однією ниткою. Тоді

$$\omega_3 = \frac{V_K}{KP} = \frac{V_1}{R_3 + r_3} = \frac{V_1}{3r + r} = \frac{V_1}{4r}, \quad (2.52)$$

$$V_{c3} = \omega_3 \cdot CP = \frac{V_1}{4r} \cdot R_3 = \frac{V_1}{4r} \cdot 3r = \frac{3}{4}V_1. \quad (2.53)$$

Підставляючи (2.51) - (2.53) у (2.50), одержимо

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2}M_3V_{c3}^2 + \frac{1}{2}J_{c3}\omega_3^2 = \frac{1}{2}M_3 \cdot \frac{9}{16}V_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2}M_3 \cdot 16 \cdot r^2 \cdot \frac{V_1^2}{16r^2} = \frac{9}{32}M_3V_1^2 + \frac{1}{2}M_3V_1^2 = \frac{25}{32}M_3V_1^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Обчислимо кінетичну енергію системи, підставляючи (2.45), (2.49) і (2.54) у формулу (2.44):

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}M_1V_1^2 + \frac{1}{4}M_2V_1^2 + \frac{25}{32}M_3V_1^2 = \\ &= \frac{V_1^2}{32}(16M_1 + 8M_2 + 25M_3) = \frac{\dot{S}_1^2}{32}(16M_1 + 8M_2 + 25M_3). \end{aligned} \quad (2.55)$$

4. Обчислимо узагальнену силу Q_{S_1} . Для цього у фіксований момент часу надамо механічній системі можливе переміщення (при цьому бажано, щоб узагальнене можливе переміщення $\delta\bar{S}_1$ було спрямовано у бік позитивного відліку узагальненої координати S_1) і обчислимо роботи активних сил на можливих переміщеннях точок прикладення цих сил:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \delta S_1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = M_1g \cdot \delta S_1 \cdot \sin \alpha; \quad (2.56)$$

$$\delta A_{P_2} = 0 \quad (2.57)$$

(тому що точка прикладення цієї сили нерухома);

$$\delta A_{P_3} = P_3 \cdot \delta S_{c3} \cdot \cos 90^\circ = 0; \quad (2.58)$$

$$\delta A_{F_{mp1}} = F_{mp1} \cdot \delta S_1 \cdot \cos 180^\circ = -F_{mp1} \cdot \delta S_1 = -fM_1g \cos \alpha \cdot \delta S_1 \quad (2.59)$$

(при цьому було враховано, що у разі похилої площини нормальна реакція опори $N_1 = P_1 \cos \alpha$ і $F_{mp1} = fN_1 = fP_1 \cos \alpha = fM_1g \cos \alpha$);

$$\delta A_{M_{mk3}} = -M_{mk3} \cdot \delta \varphi_3 = -f_K M_3 g \cdot \frac{\delta S_1}{4r} \quad (2.60)$$

(на горизонтальній поверхні нормальна реакція опори $N_3 = P_3$, тому $M_{mk3} = f_{\kappa} N_3 = f_{\kappa} P_3 = f_{\kappa} M_3 g$; співвідношення між можливими переміщеннями пропорційні відповідним співвідношенням між швидкостями (2.52), тому $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{4r}$).

Обчислимо суму можливих робіт активних сил (2.56)-(2.60):

$$\sum \delta A_k^a = M_1 g \delta S_1 \sin \alpha - f M_1 g \cos \alpha \delta S_1 - f_{\kappa} M_3 g \frac{\delta S_1}{4r} = \left\{ g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{f_{\kappa} M_3}{4r} \right] \right\} \delta S_1. \quad (2.61)$$

Тоді узагальнена сила Q_{S_1} буде дорівнювати коефіцієнту при δS_1 у виразі (2.61):

$$Q_{S_1} = g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{f_{\kappa} M_3}{4r} \right]. \quad (2.62)$$

5. Складемо рівняння Лагранжа другого роду (2.43). Частична похідна кінетичної енергії за узагальненою координатою

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0, \quad (2.63)$$

тому що узагальнена координата S_1 у вираз для кінетичної енергії (2.55) явно не входить.

Частична похідна кінетичної енергії за узагальненою швидкістю

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = \frac{2 \cdot \dot{S}_1}{32} (16M_1 + 8M_2 + 25M_3) = \frac{\dot{S}_1}{16} (16M_1 + 8M_2 + 25M_3). \quad (2.64)$$

Повна похідна кінетичної енергії за часом від вираження (2.64) дорівнює:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) = \frac{\ddot{S}_1}{16} (16M_1 + 8M_2 + 25M_3). \quad (2.65)$$

Якщо підставити (2.65), (2.63) і (2.62) у рівняння Лагранжа (2.43), одержимо

$$\frac{\ddot{S}_1}{16} (16M_1 + 8M_2 + 25M_3) - 0 = g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{f_{\kappa} M_3}{4r} \right]. \quad (2.66)$$

6. Шукане прискорення вантажу 1 дорівнює другій похідній за часом від узагальненої координати $a_1 = \ddot{S}_1$, тому з рівняння (2.66) отримаємо

$$\begin{aligned}
 a_1 = \ddot{S}_1 &= \frac{16 \cdot g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{f_{\kappa} M_3}{4r} \right]}{(16M_1 + 8M_2 + 25M_3)} = \\
 &= \frac{16 \cdot g \left[4m \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{f_{\kappa} \cdot 20m}{4r} \right]}{(16 \cdot 4m + 8 \cdot 1,5m + 25 \cdot 20m)} = \\
 &= \frac{16gm \left[4(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 5 \frac{f_{\kappa}}{r} \right]}{(64m + 12m + 500m)} = \frac{160m \left[4 \cdot (0,87 - 0,2 \cdot 0,5) - 5 \cdot \frac{0,4}{2} \right]}{576m} = \\
 &= \frac{160 \cdot 2,08m}{576m} = \frac{20,8}{36} \approx 0,58 \text{ м/с}^2. \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

Відповідь. Прискорення вантажу $a_1 = 0,58 \text{ м/с}^2$.

Питання для самоконтролю

1. Що називається числом степенів вільності механічної системи?
2. Що називається узагальненими координатами і узагальненими швидкостями. Який фізичний зміст вони можуть мати?
3. Що називається узагальненою силою? Якою може бути розмірність узагальненої сили і від чого це залежить?
4. Наведіть три способи визначення узагальнених сил.
5. Які сили називаються консервативними?
6. Як визначається потенціальна енергія консервативної механічної системи?
7. Наведіть приклади консервативних сил.
8. Як визначаються узагальнені сили для консервативної системи?
9. Який вигляд мають рівняння рівноваги системи в узагальнених координатах?
10. Запишіть рівняння рівноваги консервативної системи.
11. Запишіть рівняння Лагранжа другого роду.
12. Наведіть особливості рівнянь Лагранжа другого роду.
13. Запишіть рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи.

II МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

Одними з найважливіших для дослідження поведінки будівельних конструкцій і їх елементів при дії динамічних навантажень є теорії стійкості положень рівноваги і малих коливань механічних систем навколо цих положень, які застосовують методи аналітичної механіки. Малі коливання з достатньою для практики точністю звичайно описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, що дає змогу називати ці коливання *лінійними*.

3 Малі коливання механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги

Для вивчення коливань навколо положення рівноваги слід передусім знайти ті положення, в яких система може знаходитись у стані рівноваги.

3.1 Визначення положень рівноваги

Розглянемо механічну систему з ідеальними, стаціонарними й голономними в'язями, положення якої визначається за допомогою s узагальнених координат q_1, \dots, q_s . Згідно з (2.15), в положенні рівноваги всі узагальнені сили дорівнюють нулю:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (3.1)$$

Для консервативної системи ці рівності приймають вигляд (2.16):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (3.2)$$

Якщо узагальнені сили залежать тільки від узагальнених координат, то рівності (3.1) або (3.2) можна розглядати як рівняння відносно q_1, \dots, q_s . Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо ті положення (тобто значення параметрів q_1, \dots, q_s), в яких система може знаходитись у стані рівноваги. Якщо узагальнені сили залежать ще й від узагальнених швидкостей, то при знаходженні розв'язку рівнянь (3.1) всі узагальнені швидкості слід прирівняти до нуля.

Приклад 1. Визначити можливі положення рівноваги математичного маятника (рис. 2.3, п. 2.2).

Розв'язання

Потенціальна енергія маятника знайдена у прикладі 4 п. 2.2:

$$\Pi = \Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (1 - \cos \varphi) .$$

Складемо рівняння (3.2):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \cdot \sin \varphi = 0 , \text{ або } \sin \varphi = 0 .$$

Це рівняння має два корені: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ рад. Кореню $\varphi_1 = 0$ відповідає нижнє вертикальне положення маятника (рис. 3.1, а), кореню $\varphi_2 = \pi$ – верхнє вертикальне положення (рис. 3.1, б).

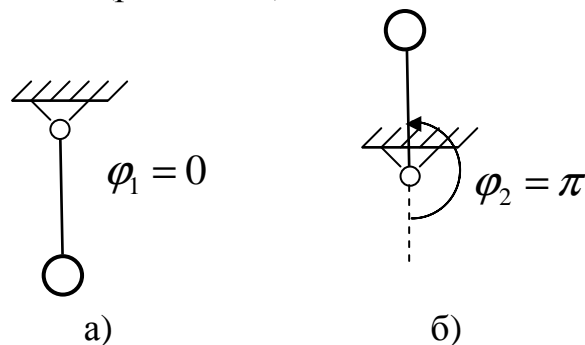


Рисунок 3.1

Відповідь. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ рад.

Приклад 2. Однорідний стержень AD довжиною $2l$ спирається кінцем А на гладку поверхню у формі півкола радіуса $OA=OB=R$, а точкою В на гладкий виступ (рис. 3.2). Визначити кут φ між стержнем і горизонтом при рівновазі.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу стержня AD. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут між стержнем і горизонтом: $q = \varphi$.

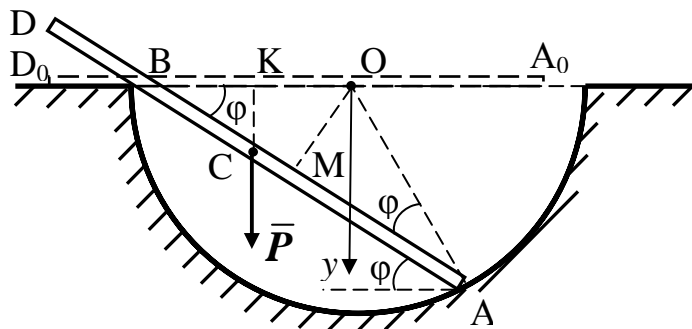


Рисунок 3.2

На стержень діє одна активна сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$, що прикладена у центрі ваги С. Ця сила є консервативною.

Визначимо потенціальну енергію системи. За нульове приймемо горизонтальне положення стержня A_0D_0 . Для визначення потенціальної енергії сили ваги врахуємо, що різниця висот між розглядуваним та нульовим положеннями дорівнює

$$CK = BC \cdot \sin \varphi = (AB - AC) \cdot \sin \varphi.$$

Враховуючи, що $AC = l$, $AB = BO \cdot \cos \varphi + OA \cdot \cos \varphi = 2R \cdot \cos \varphi$, отримаємо

$$CK = (2R \cdot \cos \varphi - l) \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin 2\varphi - l \cdot \sin \varphi.$$

Тоді

$$\Pi_p = -mg \cdot CK = -mg \cdot (R \cdot \sin 2\varphi - l \cdot \sin \varphi).$$

Складемо рівняння рівноваги (3.2):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mg \cdot (2R \cdot \cos 2\varphi - l \cdot \cos \varphi) = 0,$$

або

$$2R \cdot \cos 2\varphi - l \cdot \cos \varphi = 0.$$

З урахуванням тригонометричного співвідношення $\cos 2\varphi = 2 \cdot \cos^2 \varphi - 1$ рівняння рівноваги набуде вигляду

$$4R \cdot \cos^2 \varphi - l \cdot \cos \varphi - 2R = 0.$$

Це квадратне алгебраїчне рівняння відносно змінної $\cos \varphi$. Його корені будуть

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Корінь з від'ємним знаком не має фізичного змісту (кут φ не може перевищувати $\frac{\pi}{2}$), тому

$$\varphi = \arccos \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Відповідь. У положенні рівноваги стержень нахилений до горизонту під

кутом $\varphi = \arccos \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}$ рад.

Зауваження 1. Фізичний зміст даної задачі передбачає, що параметри R і l не є довільними:

1) оскільки $\cos \varphi < 1$, то неважко показати, що $l < 2R$. Якщо ця умова не виконується, то стержень буде лежати горизонтально, не перекидаючись навколо точки В;

2) умовою знаходження частини стержня ВD поза областю півкола є нерівність $2l > 2R \cdot \cos \varphi$. Враховуючи формулу для розв'язка $\cos \varphi$, отримаємо співвідношення $l > \frac{2}{3}R$.

Таким чином, параметр l має задовольняти нерівності $\frac{2}{3}R < l < 2R$.

Зауваження 2. Якщо з точки O на рисунку 3.2 провести вісь y вертикально вниз і скласти принцип можливих переміщень (1.12), отримаємо рівняння

$$\delta A^a = \bar{P} \cdot \delta \bar{r}_C = P \cdot \delta y_C = 0, \text{ звідки } \delta y_C = 0.$$

Таким чином, в положенні рівноваги координата y_C має стаціонарне значення, в даному разі максимальне. Це означає умову: *для тіла, що знаходиться в полі сили тяжіння, положенням стійкої рівноваги буде таке, при якому його центр ваги займає найнижче положення*. В цьому є сутність принципу Торрічеллі (1608-1647), що сформулював принцип можливих переміщень стосовно до сил тяжіння.

Зауваження 3. Неважко помітити, що оскільки координата

$$y_C = CK = R \cdot \sin 2\varphi - l \cdot \sin \varphi,$$

то умова $\delta y_C = 0$ еквівалентна рівнянню

$$\delta y_C = \frac{dy_C}{d\varphi} \delta \varphi = (2R \cdot \cos 2\varphi - l \cdot \cos \varphi) \cdot \delta \varphi = 0,$$

і, оскільки $\delta \varphi \neq 0$ (кут φ на має стаціонарного значення), отримаємо теж саме тригонометричне рівняння відносно кута φ :

$$2R \cdot \cos 2\varphi - l \cdot \cos \varphi = 0.$$

3.2 Стійкість положення рівноваги

Після визначення положень рівноваги механічної системи слід проаналізувати, які з цих положень практично реалізуються, тобто які положення є стійкими, а які нестійкими. Розглянемо поняття стійкості рівноваги за Ляпуновим.

Розглянемо механічну систему, положення якої визначається за допомогою s узагальнених координат q_1, \dots, q_s . Не порушуючи загальності, будемо вважати, що в розглядуваному положенні рівноваги всі узагальнені координати дорівнюють нулю: $q_1 = \dots = q_s = 0$, для цього достатньо вести їх відлік від положення рівноваги. Виведемо систему зі стану рівноваги, для чого надамо в початковий момент часу $t_0 = 0$ невеликі за модулем значення узагальненим координатам і їх швидкостям:

$$q_{01}, \dots, q_{0s}; \quad \dot{q}_{01}, \dots, \dot{q}_{0s},$$

які мають назву **збурення**. Позначимо функції узагальнених координат і їх швидкостей при подальшому, **збуреному русі** системи як

$$q_1(t), \dots, q_s(t); \quad \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t).$$

Положення рівноваги називають **стійким**, якщо для будь-яких як завгодно малих додатних чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$, $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_s$ можна знайти інші додатні числа $\delta_1, \dots, \delta_s$, $\delta'_1, \dots, \delta'_s$ такі, що для всіх збурень, які відповідають умовам

$$|q_{01}| \leq \delta_1, \dots, |q_{0s}| \leq \delta_s, \quad |\dot{q}_{01}| \leq \delta'_1, \dots, |\dot{q}_{0s}| \leq \delta'_s,$$

для будь-якого моменту часу $t \geq t_0$ виконуються нерівності

$$|q_1(t)| \leq \varepsilon_1, \dots, |q_s(t)| \leq \varepsilon_s, \quad |\dot{q}_1(t)| \leq \varepsilon'_1, \dots, |\dot{q}_s(t)| \leq \varepsilon'_s.$$

В іншому разі положення рівноваги називають **нестійким**.

Якщо у збуреному русі всі узагальнені координати і їх швидкості з часом наближаються до нуля

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_k(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_k(t) = 0 \quad (k = 1, \dots, s),$$

то положення рівноваги називається **асимптотично стійким**.

Сформульоване визначення називають **математичним**, або визначенням стійкості рівноваги за Ляпуновим. Наведемо ще одне, **фізичне** визначення стійкості положення рівноваги.

Для простоти розглянемо консервативну систему з одним ступенем вільності. Уявимо рух системи у **фазовій площині**, координатами якої будуть q, \dot{q} . Кожному стану системи на фазовій площині відповідає одна точка, яка називається **зображальною**. У разі зміни фазових координат q, \dot{q} з часом зображальна точка переміщується по фазовій площині. Траєкторію зображальної точки називають **фазовою траєкторією**. Можна показати, що при вільних коливаннях консервативної системи зображальна точка рухається на фазовій площині по еліпсу з центром у початку координат, параметри (розміри) якого однозначно визначаються початковими умовами (рис. 3.3). Положенню рівноваги відповідає початок координат О.

З властивості фазових траєкторій, які є сімейством еліпсів з єдиним

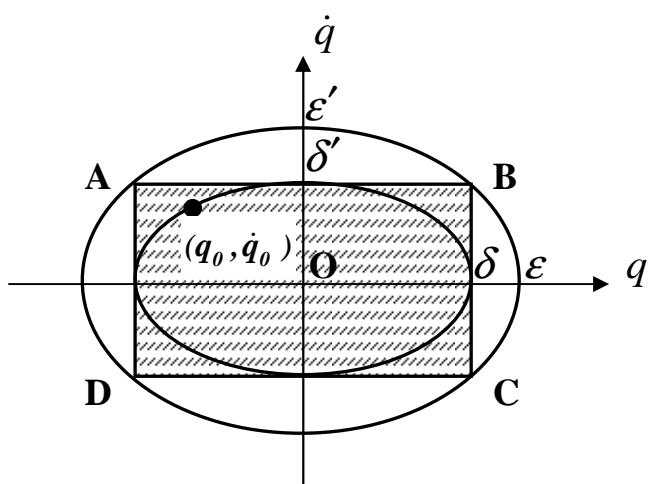


Рисунок 3.3

центром, впливає, що коли початкове положення (збурення) зображальної точки (q_0, \dot{q}_0) буде знаходитись в межах прямокутника ABCD, тобто будуть виконуватися умови $|q_0| \leq \delta, |\dot{q}_0| \leq \delta'$, то фазова траєкторія зображальної точки не вийде за межі еліпса з напівосями ϵ, ϵ' , що означає виконання

нерівностей $|q(t)| \leq \epsilon, \dots, |\dot{q}(t)| \leq \epsilon'$.

Таким чином, якщо при малому збуренні механічної системи з положення рівноваги вона здійснює малі незатухаючі коливання навколо нього, то таке положення рівноваги називається **стійким**. Якщо система здійснює малі затухаючі коливання (при цьому зображальна точка рухається на фазовій площині по спіралі до початку координат O), то таке положення рівноваги називається **асимптотично стійким** (рис. 3.4).

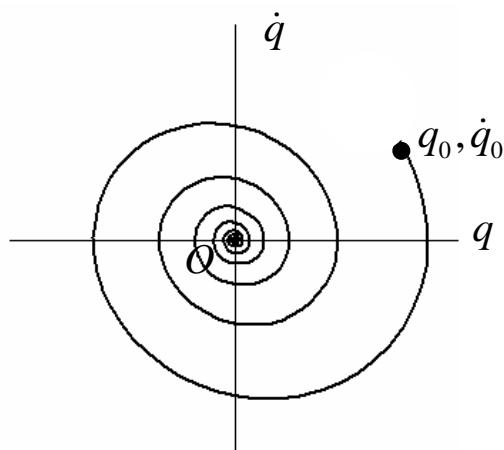


Рисунок 3.4

Простими прикладами стійкого і нестійкого положень рівноваги є положення кульки відповідно у нижчій точці заглиблення (рис. 3.5, а) і на верхній точці опуклості (рис. 3.5, б). Положення рівноваги кульки на

горизонтальній площині (рис. 3.5, в), при якій вона може знаходитись у рівновазі і в будь-якому іншому положенні, називається *байдужим*.

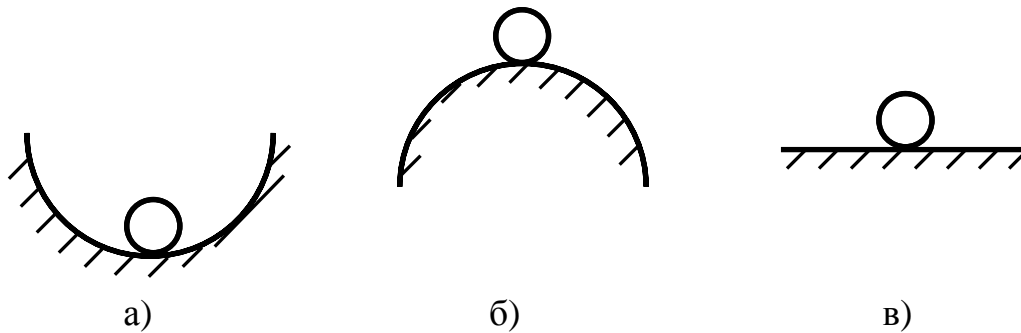


Рисунок 3.5

3.3 Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи. Теорема Лагранжа-Діріхле. Критерій Сільвестра

Достатні умови стійкості рівноваги консервативної системи визначаються *теоремою Лагранжа-Діріхле*: якщо в положенні рівноваги консервативної системи з голономними, ідеальними й стаціонарними в'язями потенціальна енергія має ізольований мінімум, то таке положенням рівноваги є стійким.

З доведенням цієї теореми можна ознайомитись у [4, 7, 13], або отримати як наслідок теореми Ляпунова про стійкість руху, що розглядається в посібниках з теорії стійкості руху.

З теореми випливає, що для визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи достатньо з'ясувати, чи має потенціальна енергія в цьому положенні мінімум. Розглянемо два випадки.

1. Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи з одним ступенем вільності.

З курсу математики відомо, що для функції однієї змінної питання максимуму чи мінімуму в точці екстремуму (точці, де перша похідна цієї функції дорівнює нулю) вирішується на підставі знака значення другої похідної функції у зазначеній точці. Якщо знак є додатним, функція в точці екстремуму має мінімум. Таким чином, положення рівноваги консервативної системи з одним ступенем вільності буде стійким, якщо друга похідна потенціальної енергії за узагальненою координатою, що обчислена в положенні рівноваги, є додатною:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=0} > 0. \quad (3.3)$$

2. Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи зі скінченним числом степенів вільності.

У цьому разі критерій мінімуму потенціальної енергії, яка буде функцією скінченного числа змінних, має більш складний вигляд.

Розглянемо одне з положень рівноваги консервативної системи з s степенями вільності. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що в цьому положенні потенціальна енергія дорівнює нулю:

$$\Pi(0,0,\dots,0) = 0 \quad (3.4)$$

(це можна зробити, оскільки потенціальна енергія визначається з точністю до сталої величини). Будемо розглядати малі зміщення системи з положення рівноваги, тоді узагальнені координати q_j можна розглядати як величини першого порядку мализни. Розкладемо вираз потенціальної енергії, яка є функцією узагальнених координат $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$, в ряд Маклорена за степенями узагальнених координат:

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \Pi(0,0,\dots,0) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots, \quad (3.5)$$

де точками в кінці позначені доданки більш високого порядку мализни, ніж другий. Перші два доданки у виразі (3.5) дорівнюють нулю в силу співвідношень (3.2) і (3.4). Тоді з точністю до доданків другого порядку мализни відносно узагальнених координат потенціальна енергія набуде вигляду

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j. \quad (3.6)$$

Позначимо коефіцієнти при других степенях узагальнених координат як c_{ij} :

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (3.7)$$

Коефіцієнти c_{ij} називаються **узагальненими коефіцієнтами жорсткості**. Вони є *сталими* (визначаються в положенні рівноваги) і *симетричними* ($c_{ij} = c_{ji}$) величинами. Тоді вираз для потенціальної енергії (3.6) прийме вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j. \quad (3.8)$$

Отже, при малих відхиленнях консервативної системи від положення рівноваги її потенціальна енергія є *однорідною квадратичною формою* (функцією) узагальнених координат.

Якщо квадратична форма (3.8) буде додатно-визначеною (додатною при всіх значеннях узагальнених координат, якщо вони всі не дорівнюють одночасно нулю), то потенціальна енергія в положенні рівноваги (де $\Pi(0,0,\dots,0)=0$) матиме мінімум, тобто це положення рівноваги буде стійким. Питання про знак квадратичної форми визначається **теоремою Сільвестра**: для того щоб квадратична форма була додатно-визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатні. Доведення цієї теореми наводиться в курсі лінійної алгебри.

Матриця квадратичної форми і її головні діагональні мінори мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Таким чином, положення рівноваги консервативної системи з s степенями вільності буде стійким, якщо виконуються умови:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_s > 0. \quad (3.10)$$

З умови (3.10) випливає послідовність дій при застосуванні теореми Лагранжа – Діріхле для консервативної системи з s степенями вільності: потрібно розкласти потенціальну енергію в ряд за степенями узагальнених координат в околі положення рівноваги, утримуючи доданки не вищі, ніж другого порядку мализни, визначити узагальнені коефіцієнти жорсткості c_{ij} і скласти визначники (3.9). Якщо для усіх визначників виконуються умови (3.10), то розглядуване положення рівноваги є стійким.

Зауваження 1. Теорема Лагранжа-Діріхле дає тільки достатні умови стійкості положення рівноваги консервативної системи. На основі цієї теореми не можна стверджувати, що відсутність мінімуму потенціальної енергії в положенні рівноваги означає нестійкість стану рівноваги. Також не можна стверджувати, що положенню стійкої рівноваги завжди відповідає мінімум потенціальної енергії.

Зауваження 2. У тих випадках, коли деякі узагальнені координати не входять явно у вираз потенціальної енергії, положення рівноваги системи відносно цих координат буде байдужим. Прикладом може служити положення рівноваги кулі на горизонтальній поверхні (рис. 3.5, в).

Зауваження 3. Питання про нестійкість положення рівноваги ґрунтується на теоремах Ляпунова. Одна з **теорем Ляпунова** формулюється наступним чином: *рівновага консервативної системи нестійка, якщо відсутність мінімуму потенціальної енергії визначається членами другого порядку мализни в її розкладі в ряд за степенями узагальнених координат.* Для цього потенціальна енергія має бути представленою формулою (3.8).

Приклад 3. Визначити стійкість положень рівноваги математичного маятника, які були визначені у прикладі 1 п. 3.1 (рис. 3.1).

Розв'язання

Обчислимо другу похідну потенціальної енергії за узагальненою координатою φ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mgl \cdot \cos \varphi .$$

З'ясуємо далі знак другої похідної у відповідних положеннях рівноваги:

1. При $\varphi_1 = 0$ значення $\cos \varphi_1 = 1$ і $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} = mgl > 0$, тобто нижнє

положення рівноваги математичного маятника є стійким.

2. При $\varphi_2 = \pi$ значення $\cos \varphi_2 = -1$ і $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\pi} = -mgl < 0$, отже верхнє

положення рівноваги математичного маятника є нестійким.

Приклад 4. Визначити умови стійкості положення рівноваги астатичного маятника (рис. 3.6), який складається з жорсткого невагомого стержня довжиною l , що несе на кінці точковий вантаж **М** масою m . До стержня прикріплені дві пружини однакової жорсткості c_1 на відстані d від його нижнього кінця.

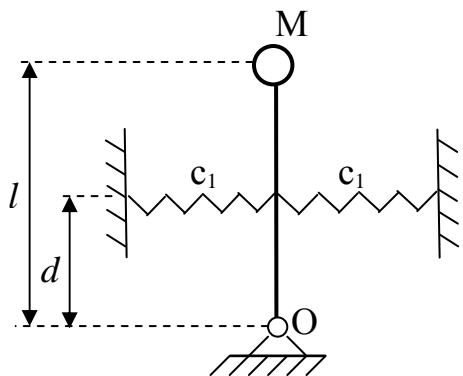


Рисунок 3.6

Розв'язання

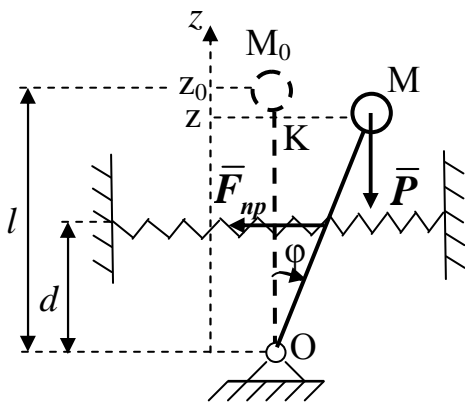


Рисунок 3.7

Будемо визначати положення маятника за допомогою кута відхилення стержня ОМ від вертикалі – φ . Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q прийемо кут повороту стержня: $q = \varphi$. Зобразимо маятник у довільному положенні при його коливаннях (рис. 3.7). На точковий вантаж **М** діє сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$, на стержень ОМ – сила пружності \bar{F}_{np} , що складається з сил пружності двох пружин,

які напрямлені до положення рівноваги стержня (у цьому положенні пружини недеформовані). Таким чином, діючі на маятник сили є консервативними.

Визначимо потенціальну енергію системи, що складається з потенціальних енергій сили ваги і двох сил пружності, використовуючи формули (2.10), (2.11), (2.12). За нульове прийемо положення маятника у стані спокою OM_0 . Для визначення потенціальної енергії сили ваги врахуємо, що різниця висот між розглядуваним **М** та нульовим M_0 положеннями дорівнює

$$z - z_0 = OK - OM_0 = l \cdot \cos \varphi - l = l \cdot (\cos \varphi - 1) .$$

Тоді

$$\Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (\cos \varphi - 1) .$$

Розкладемо функцію $\cos \varphi$ в ряд Маклорена і утримуємо доданки порядку мализни не вищого, ніж другий:

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 .$$

Отже,

$$\Pi_p = mgl \cdot (\cos \varphi - 1) \approx mgl \cdot (1 - \frac{1}{2} \varphi^2 - 1) = -mgl \cdot \frac{\varphi^2}{2} .$$

Для визначення потенціальної енергії сил пружності врахуємо, що деформація кожної пружини в нульовому положенні дорівнює $\lambda_0 = 0$, а у довільному положенні при малому куті повороту φ : $\lambda \approx d \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Тоді

$$\Pi_{F_{np}} = 2 \cdot \frac{c_1}{2} (\lambda^2 - \lambda_0^2) \approx 2 \cdot \frac{c_1}{2} (d^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi - 0) = c_1 \cdot d^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi .$$

Розкладемо функцію $tg\varphi$ в ряд Маклорена і утримуємо доданки порядку мализни не вищого, ніж другий:

$$tg\varphi \approx \varphi.$$

Отже,

$$\Pi_{F_{np}} = c_1 \cdot d^2 \cdot tg^2\varphi \approx c_1 d^2 \varphi^2.$$

Таким чином, потенціальна енергія системи при малих відхиленнях від положення рівноваги $\varphi = 0$ дорівнює

$$\Pi = \Pi_P + \Pi_{F_{np}} = -mgl \frac{\varphi^2}{2} + c_1 d^2 \varphi^2 = \frac{1}{2}(-mgl + 2c_1 d^2) \varphi^2.$$

Сформуємо критерій стійкості рівноваги (3.3):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}(-mgl + 2c_1 d^2) \cdot 2\varphi = (-mgl + 2c_1 d^2) \cdot \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgl + 2c_1 d^2.$$

Згідно з теоремою Лагранжа-Діріхле вертикальне положення рівноваги буде стійким, якщо

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} = -mgl + 2c_1 d^2 > 0, \quad \text{або} \quad d^2 > \frac{mgl}{2c_1}.$$

Відповідь. Вертикальне положення рівноваги астатичного маятника буде стійким, якщо відстань закріплення пружин від нижнього кінця стержня задовольняє нерівності $d^2 > \frac{mgl}{2c_1}$. В іншому випадку положення рівноваги

буде нестійким.

Зауваження. Визначення потенціальної енергії консервативної системи в околі положення рівноваги і застосування теореми Лагранжа-Діріхле є одним з методів розрахунку стійкості положення рівноваги цієї системи («енергетичний» метод розрахунку стійкості).

3.4 Вираження кінетичної енергії системи через узагальнені координати й швидкості

Розглянемо механічну систему, що складається з N матеріальних точок, з голономними і стаціонарними в'язями, яка має s степенів вільності. Положення точок системи визначаються їх радіусами-векторами, які для розглядуваних в'язей залежать тільки від узагальнених координат:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_s) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.11)$$

Похідна за часом від виразу (3.11) визначає швидкість k -ї точки:

$$\bar{v}_k = \dot{\bar{r}}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.12)$$

Квадрат швидкості k -ї точки з урахуванням (3.12) матиме вигляд

$$v_k^2 = \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.13)$$

Складемо вираз кінетичної енергії системи в її русі:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.14)$$

Змінімо порядок підсумування:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.15)$$

Позначимо коефіцієнти при других степенях узагальнених швидкостей через a_{ij} :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (3.16)$$

Коефіцієнти a_{ij} називаються *узагальненими коефіцієнтами інерції*. Вони *залежать тільки від узагальнених координат* (від узагальнених швидкостей не залежать) і є *симетричними* ($a_{ij} = a_{ji}$) величинами. Тоді вираз для кінетичної енергії (3.15) прийме вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.17)$$

Отже, при русі механічної системи з голономними й стаціонарними в'язями її кінетична енергія є *однорідною квадратичною формою* (функцією) узагальнених швидкостей. Ця форма є *додатно-визначеною*, оскільки при русі системи її кінетична енергія завжди додатна $T \geq 0$.

3.5 Дисипативні сили. Функція розсіювання Релея

Розглянемо механічну систему, що складається з N матеріальних точок, з голономними і стаціонарними в'язями, яка має s степенів вільності. **Дисипативними** називаються сили опору середовища, що пропорційні першим степеням швидкостей точок і напрямлені у бік, протилежний до швидкостей:

$$\bar{R}_k = -b_k \bar{v}_k \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.18)$$

де $b_k = \text{const} > 0$ – коефіцієнти опору. В цьому випадку говорять, що має місце **в'язке тертя**.

Скориставшись формулами (2.6) і (2.20), визначимо узагальнену дисипативну силу

$$Q_j^D = \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^N b_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^N b_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k v_k^2 \right).$$

Введемо у розгляд скалярну функцію

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k v_k^2, \quad (3.19)$$

яку називають **функцією розсіювання Релея** (або **дисипативною функцією**). Тоді вираз для узагальненої дисипативної сили приймає вигляд

$$Q_j^D = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (3.20)$$

Таким чином, *узагальнені сили дисипативної системи* дорівнюють взятим зі знаком мінус частинним похідним дисипативної функції системи за відповідними узагальненими швидкостями.

Виразимо функцією розсіювання через узагальнені швидкості. Для цього помітимо, що вираз (3.19) за своєю формою співпадає з виразом для кінетичної енергії (3.14). Вираз функції розсіювання через узагальнені швидкості буде співпадати за формою з аналогічним виразом (3.17), зміняться тільки коефіцієнти квадратичної форми, які позначимо через b_{ij} і визначимо за формулою, аналогічною (3.16)

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^N b_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (3.21)$$

Коефіцієнти b_{ij} називаються **узагальненими коефіцієнтами опору**. Вони *залежать тільки від узагальнених координат* (від узагальнених швидкостей не

залежать) і є *симетричними* ($b_{ij} = b_{ji}$) величинами. Тоді вираз для функції розсіювання прийме вигляд

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.22)$$

Отже, при русі механічної системи з голономними й стаціонарними в'язями її функція розсіювання є *однорідною квадратичною формою* (функцією) узагальнених швидкостей.

Зупинимось на фізичному змісті дисипативної функції. Будемо вважати, що на систему діють потенціальні і дисипативні сили. Потужність дисипативних сил дорівнює

$$N^D = \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \bar{v}_k = - \sum_{k=1}^N b_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = - \sum_{k=1}^N b_k v_k^2,$$

або

$$N^D = -2\Phi. \quad (3.23)$$

Потужність потенціальних сил визначається за формулою

$$N^{\Pi} = \frac{dA}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt}. \quad (3.24)$$

Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії системи у диференціальній формі, отримаємо

$$\frac{dT}{dt} = N^{\Pi} + N^D = - \frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi,$$

або

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -2\Phi. \quad (3.25)$$

Таким чином, оскільки $\Phi \geq 0$, повна механічна енергія системи (якби вона була консервативною) $T + \Pi$ під дією сил опору зменшується (розсіюється), переходячи в інші форми енергії (наприклад, в теплову). З рівняння (3.25) витікає, що *дисипативна функція може служити мірою розсіювання енергії*.

3.6 Малі коливання консервативної системи з одним ступенем вільності навколо положення стійкої рівноваги

Розглянемо консервативну систему з голономними й стаціонарними в'язями, яка має один степінь вільності. При збуреному русі навколо положення стійкої рівноваги узагальнена координата q , що визначає положення системи, і

узагальнена швидкість \dot{q} будуть малими за модулями величинами. Це дає змогу застосувати приблизний метод дослідження руху, при якому первісні нелінійні в загальному випадку диференціальні рівняння руху спрощуються і замінюються на лінійні рівняння. Для цього достатньо розкласти вирази для кінетичної і потенціальної енергій у ряди за степенями q і \dot{q} , обмежившись членами другого порядку мализни.

Визначимо кінетичну енергію. Згідно з виразом (3.17) кінетична енергія для системи з одним степенем вільності має вигляд

$$T = \frac{1}{2} a_{11}(q) \cdot \dot{q}^2, \quad (3.26)$$

де $a_{11}(q)$ – узагальнений коефіцієнт інерції, який у загальному випадку залежить від узагальненої координати. Розкладемо $a_{11}(q)$ в ряд Маклорена за степенями q :

$$a_{11}(q) = a_{11}(0) + \left(\frac{da_{11}}{dq} \right)_0 q + \dots \quad (3.27)$$

Підставимо (3.27) у (3.26) і збережімо доданки не вищі за другий порядок мализни:

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11}(0) + \left(\frac{da_{11}}{dq} \right)_0 q + \dots \right] \cdot \dot{q}^2 \approx \frac{1}{2} a_{11}(0) \dot{q}^2.$$

Позначимо $a = a_{11}(0)$, тоді кінетична енергія набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (3.28)$$

Таким чином, наближений вираз кінетичної енергії (3.28) відрізняється від точного (3.26) тим, що узагальнений коефіцієнт інерції $a_{11}(q)$ замінюється на його значення $a = a_{11}(0)$ в положенні рівноваги. При цьому $a = \text{const} > 0$, оскільки кінетична енергія T завжди додатна при $\dot{q} \neq 0$.

Визначимо далі потенціальну енергію. Згідно з виразом (3.8) потенціальна енергія для системи з одним степенем вільності з прийнятою точністю має вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} q^2 = \frac{1}{2} c q^2, \quad (3.29)$$

при цьому узагальнений коефіцієнт жорсткості є додатним $c = \text{const} > 0$, оскільки положення рівноваги стійке.

Складемо диференціальне рівняння руху. Для цього скористаємось рівнянням Лагранжа другого роду (2.31). Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq$$

і підставимо їх у рівняння (2.31). Тоді рівняння Лагранжа набуде вигляду

$$a\ddot{q} = -cq.$$

Перетворимо отримане рівняння, для чого:

- функцію q і її похідні за часом перенесемо в ліву частину рівняння

$$a\ddot{q} + cq = 0;$$

- коефіцієнт перед вищою похідною зробимо рівним одиниці (поділимо всі доданки на узагальнений коефіцієнт інерції a):

$$\ddot{q} + \frac{c}{a}q = 0;$$

- коефіцієнт перед функцією q позначимо

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}. \quad (3.30)$$

Тоді *диференціальне рівняння малих коливань консервативної системи навколо положення стійкої рівноваги* набуде вигляду

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.31)$$

Таким чином, рух консервативної системи описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Визначимо тепер розв'язок диференціального рівняння. Оскільки рівняння (3.31) збігається з диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки, його розв'язок можна подати у формі

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (3.32)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, що визначаються за допомогою початкових умов.

Для визначення сталих інтегрування потрібно мати вираз узагальненої швидкості. Диференціюючи (3.32) за часом, отримаємо

$$\dot{q} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.33)$$

У загальному випадку початкові умови мають вигляд: $q|_{t=0} = q_0, \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0$. Підставляючи початкові умови в (3.32), (3.33), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування C_1, C_2 :

$$\begin{cases} q_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ \dot{q}_0 = -C_1 \omega_0 \sin 0 + C_2 \omega_0 \cos 0, \end{cases}$$

звідки

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи сталі інтегрування у вираз (3.32), отримаємо

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.34)$$

Коливання, що відбуваються під дією консервативних сил, називаються **вільними (власними)**. Отже, рівняння (3.34) є **рівнянням вільних, або власних, коливань консервативної системи** навколо положення її стійкої рівноваги.

Це рівняння можна записати в іншій, еквівалентній формі:

$$q = A \sin(\omega_0 t + \varepsilon), \quad (3.35)$$

де параметри A, ε пов'язані зі сталими інтегрування C_1, C_2 , а значить і з початковими умовами співвідношеннями

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \varepsilon = \arctg\left(\frac{C_1}{C_2}\right) = \arctg\left(\frac{q_0 \omega_0}{\dot{q}_0}\right), \quad (3.36)$$

З формули (3.36) видно, що параметр A є **амплітудою коливань** (найбільшим відхиленням узагальненої координати від положення рівноваги), аргумент $\omega_0 t + \varepsilon$ – **фазою коливань**, величина ε – **початковою фазою**, величина ω_0 – **коловою (власною) частотою коливань** (визначає число коливань за проміжок часу 2π секунд і вимірюється у рад/с (або $1/\text{с}$)). Власна частота ω_0 пов'язана з **періодом** (проміжком часу, протягом якого відбувається повне коливання) формулою

$$T_{\text{період}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (3.37)$$

Проаналізуємо **властивості вільних коливань**:

1) коливання механічної системи під дією консервативних сил навколо положення стійкої рівноваги, враховуючи (3.34) або (3.35), є незатухаючими гармонійними коливаннями;

- 2) власна частота ω_0 і період $T_{\text{період}}$ від початкових умов не залежать, а визначаються тільки параметрами системи – узагальненими коефіцієнтами жорсткості c і інерції a (див. формули (3.30), (3.37));
- 3) амплітуда A і початкова фаза коливань \mathcal{E} залежать від початкових умов q_0, \dot{q}_0 (формули (3.36)).

Графік залежності узагальненої координати від часу при вільних коливаннях наведений на рисунку 3.8. На фазовій площині при вільних коливаннях консервативної системи зображальна точка рухається по еліпсу з центром у початку координат, параметри (розміри) якого однозначно визначаються початковими умовами (рис. 3.9). Положенню рівноваги відповідає початок координат O . При русі системи жодна фазова траєкторія не перетинає точку O , яка має назву особливої точки типу «центр».

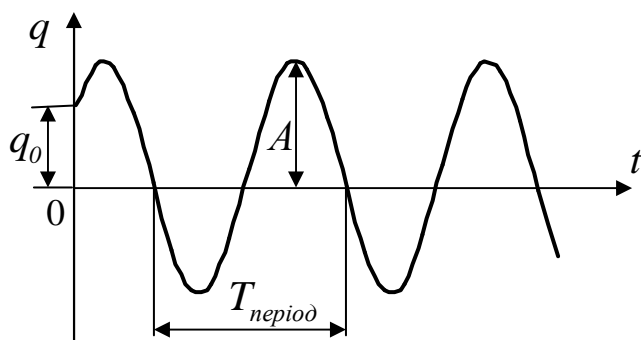


Рисунок 3.8

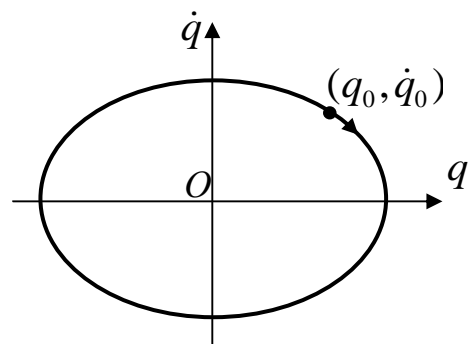


Рисунок 3.9

Приклад 5. Визначити період малих коливань астатичного маятника (див. приклад 4, п. 3.3, рис. 3.6, 3.7).

Розв'язання

Період малих коливань консервативної системи з одним ступенем вільності можна визначити за формулою (3.37), якщо будуть відомі узагальнені коефіцієнти жорсткості c і інерції a . Для визначення узагальнених коефіцієнтів можна скласти вирази потенціальної і кінетичної енергії системи в довільному положенні і порівняти їх із загальними формулами (3.28) і (3.29).

Знайдемо узагальнений коефіцієнт жорсткості c . Потенціальна енергія астатичного маятника була визначена у прикладі 4, п. 3.3:

$$\Pi = \frac{1}{2}(-mgl + 2c_1 d^2)\varphi^2.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.29), знаходимо узагальнений коефіцієнт жорсткості як множник між числовим коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ і квадратом узагальненої координати φ^2 :

$$c = -mgl + 2c_1d^2.$$

Визначимо узагальнений коефіцієнт інерції a . Для цього складемо вираз кінетичної енергії маятника у довільному положенні. Вона визначається як кінетична енергія точкового вантажу M : $T = \frac{mv^2}{2}$. Лінійну швидкість v виразимо через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega$, що є кутовою швидкістю обертання стержня OM навколо осі, яка проходить через точку O : $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$. Тоді кінетична енергія системи буде

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.28), знаходимо узагальнений коефіцієнт інерції як множник між числовим коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ і квадратом узагальненої швидкості $\dot{\varphi}^2$, обчислений у положенні рівноваги $\varphi = 0$:

$$a = (ml^2)_{\varphi=0} = ml^2.$$

Визначимо період малих коливань за формулою (3.37):

$$T_{\text{період}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{-mgl + 2c_1d^2}}.$$

Відповідь. $T_{\text{період}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{-mgl + 2c_1d^2}}$. З цієї формули випливає, що при рівності нулю знаменника $2c_1d^2 - mgl = 0$ період приймає нескінченне значення, що відповідає втраті стійкості положення рівноваги астатичного маятника (система «ніколи не повернеться» у початкове положення).

Зауваження. Пошук умови, за якої період малих коливань консервативної системи навколо положення рівноваги стає нескінченним, є одним з методів розрахунку стійкості положення рівноваги цієї системи («динамічний» метод розрахунку стійкості).

Приклад 6. Визначити період малих коливань математичного маятника (див. приклад 5, п. 2.6, рис. 2.4).

Розв'язання

Для визначення узагальнених коефіцієнтів жорсткості c і інерції a складемо вирази потенціальної і кінетичної енергії системи в довільному положенні і порівняємо їх із загальними формулами (3.28) і (3.29).

Знайдемо узагальнений коефіцієнт жорсткості c . Потенціальна енергія математичного маятника була визначена в прикладі 3, п. 2.2:

$$\Pi = mgl \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Розкладемо функцію $\cos \varphi$ в ряд Маклорена і утримаємо доданки порядку мализни не вищого, ніж другий: $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$.

Отже,
$$\Pi = mgl \cdot (1 - \cos \varphi) \approx mgl \cdot (1 - 1 + \frac{1}{2} \varphi^2) = mgl \cdot \frac{\varphi^2}{2}.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.29), знаходимо узагальнений коефіцієнт жорсткості як множник між числовим коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ і квадратом узагальненої координати φ^2 :

$$c = mgl.$$

Знайдемо узагальнений коефіцієнт інерції a . Кінетична енергія математичного маятника була визначена в прикладі 4, п. 2.6:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.28), знаходимо узагальнений коефіцієнт інерції як множник між числовим коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ і квадратом узагальненої швидкості $\dot{\varphi}^2$, обчислений у положенні рівноваги $\varphi = 0$:

$$a = (ml^2)_{\varphi=0} = ml^2.$$

Визначимо період малих коливань за формулою (3.37):

$$T_{\text{період}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Відповідь. $T_{\text{період}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. З цієї формули випливає, що період математичного

маятника залежить тільки від довжини стержня l . Чим більшою є довжина, тим більший період коливань маятника.

3.7 Вплив сил опору на малі коливання консервативної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги

Нехай на механічну систему, крім консервативних, діють дисипативні сили. Для системи з одним степенем вільності функція Релея (3.22) має вигляд, аналогічний до виразу кінетичної енергії (3.28):

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \quad (3.38)$$

де b – узагальнений коефіцієнт опору, що при малих коливаннях обчислюється, як і узагальнений коефіцієнт інерції, у положенні рівноваги.

Узагальнена сила опору згідно з (3.20) визначається за формулою

$$Q^D = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}, \quad (3.39)$$

У цьому разі рівняння Лагранжа має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q^D, \quad (3.40)$$

де перший доданок у правій частині рівняння відповідає консервативним, а другий – дисипативним силам. Враховуючи формули для кінетичної (3.28) і потенціальної (3.29) енергій, а також формулу (3.39), рівняння Лагранжа (3.40) набуде вигляду

$$a \ddot{q} = -c q - b \dot{q}.$$

Перетворюючи це рівняння, як і в п. 3.6, і вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad 2h = \frac{b}{a}, \quad (3.41)$$

отримаємо *диференціальне рівняння малих коливань механічної системи при дії консервативних і дисипативних сил навколо положення стійкої рівноваги:*

$$\ddot{q} + 2h \dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.42)$$

Це рівняння також є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язки диференціального рівняння (3.42). Характеристичне рівняння для (3.42) має вигляд

$$z^2 + 2hz + \omega_0^2 = 0,$$

його корені дорівнюють

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (3.43)$$

Із (3.43) видно, що характер руху системи істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0 : якщо $h \geq \omega_0$, то корені характеристичного рівняння дійсні, якщо $h < \omega_0$ - то комплексні. Розглянемо ці випадки.

1. *Випадок великого опору: $h > \omega_0$.*

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.42) матиме вигляд

$$q = C_1 \cdot e^{z_1 t} + C_2 \cdot e^{z_2 t}. \quad (3.44)$$

Це рівняння описує *аперіодичний (не коливальний) затухаючий рух*. Узагальнена координата q при $t \rightarrow \infty$ монотонно зменшується по експоненті (оскільки обидва корені z_1 і z_2 від'ємні), і система наближається до положення статичної рівноваги. Графіки функції (3.44) при різних початкових умовах (при $q_0 > 0, \dot{q}_0 > 0$ – крива 1; при $q_0 > 0, \dot{q}_0 \leq 0$, але $|\dot{q}_0| < |z_2|q_0$ – крива 2; при $q_0 > 0, \dot{q}_0 < 0$, але $|\dot{q}_0| > |z_2|q_0$ – крива 3) наведені на рисунку 3.10.

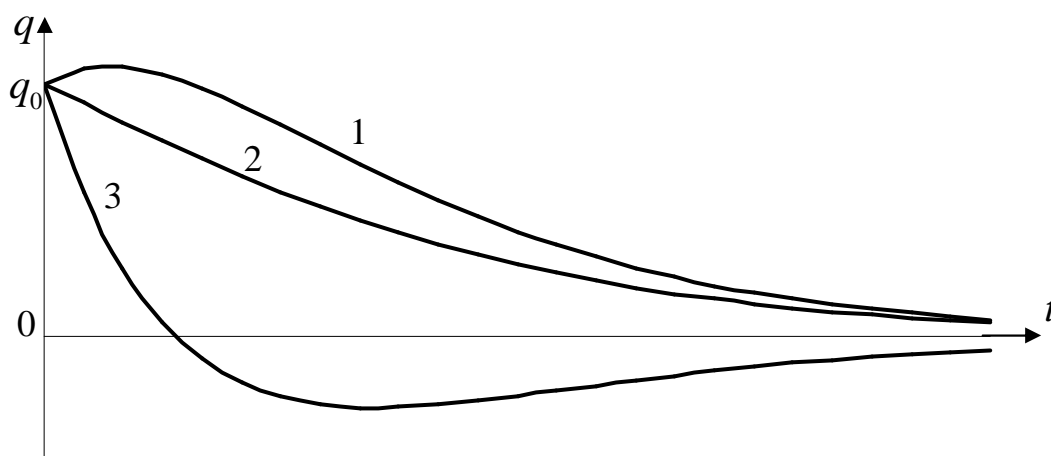


Рисунок 3.10

2. *Граничний випадок: $h = \omega_0$.*

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.42) матиме вигляд

$$q = e^{-ht} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t). \quad (3.45)$$

Такий рух також є *аперіодичним затухаючим* ($q \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) і графіки функції (3.45) при різних початкових умовах мають вигляд, як на рисунку 3.10.

3. Випадок малого опору: $h < \omega_0$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.42) матиме вигляд

$$q = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t), \quad (3.46)$$

де $C_1 = q_0$, $C_2 = \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_0^*}$ – сталі інтегрування, які визначаються за

допомогою початкових умов, а величина

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \quad (3.47)$$

Для зручності аналізу перетворимо вираз (3.46) у форму, аналогічну (3.35):

$$q = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varepsilon), \quad (3.48)$$

$$\text{де } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_0^*} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{C_1}{C_2} = \frac{q_0 \cdot \omega_0^*}{\dot{q}_0 + hq_0}.$$

З рівнянь (3.46) або (3.48) видно, що *рух системи має затухаючий коливальний характер* (оскільки $e^{-ht} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Коливання, що відбуваються під дією консервативних і дисипативних сил називаються *затухаючими*. Величина ω_0^* має назву *колової частоти затухаючих коливань* (або *власної частоти коливань дисипативної системи*), а параметр h називають *коефіцієнтом демпфірування*. Графік функції (3.48) наведений на рисунку 3.11.

На рисунку 3.11 криві $q = A \cdot e^{-ht}$ і $q = -A \cdot e^{-ht}$ є границями області, усередині якої розташовується графік руху. Рух системи є коливальним, але не періодичним, оскільки з часом послідовні максимальні відхилення узагальненої координати від положення рівноваги A_1, A_2, \dots зменшуються.

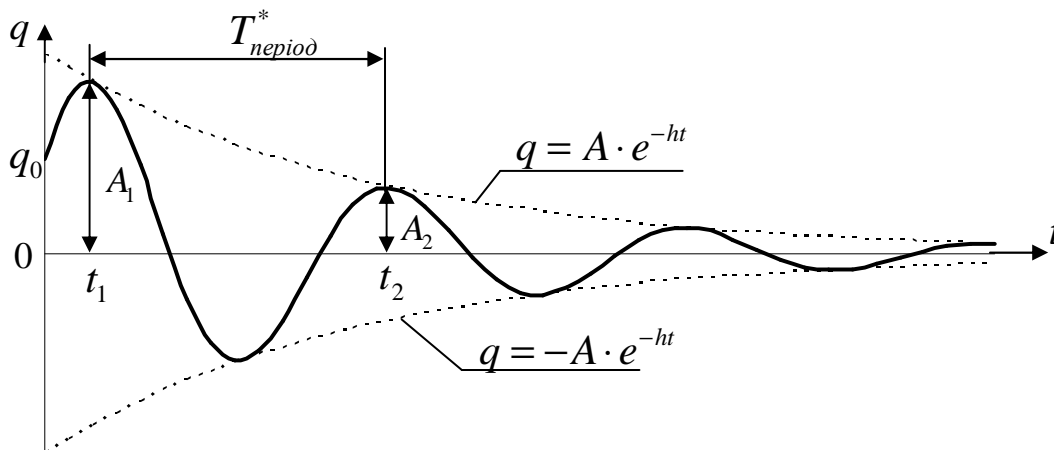


Рисунок 3.11

Проте проміжок часу $T_{\text{період}}^*$ між цими відхиленнями є величиною сталою і дорівнює

$$T_{\text{період}}^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (3.49)$$

Величину $T_{\text{період}}^*$ умовно називають **періодом затухаючих коливань**. Зрівнюючи формули (3.37), (3.47) і (3.49), можна зробити висновок, що *період затухаючих коливань більший за період відповідних вільних коливань системи*.

Розглянемо відношення послідовних максимальних відхилень узагальненої координати від положення рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{-ht_2} \cdot \sin(\omega_0^* t_2 + \varepsilon)}{\cancel{A} \cdot e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)} = \frac{e^{-h(t_1 + T_{\text{період}}^*)} \cdot \sin[\omega_0^*(t_1 + T_{\text{період}}^*) + \varepsilon]}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)} = \\ &= \frac{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot e^{-hT_{\text{період}}^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + 2\pi + \varepsilon)}{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)} = \frac{e^{-hT_{\text{період}}^*} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)}}{\cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)}} = e^{-hT_{\text{період}}^*}. \end{aligned}$$

Таким чином, відношення послідовних амплітуд затухаючих коливань стало і дорівнює

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = e^{-hT_{\text{період}}^*}. \quad (3.50)$$

Величина η (знаменник геометричної прогресії, за якою спадають амплітуди затухаючих коливань) називається **декрементом затухаючих коливань** (фактором затухання), а модуль натурального логарифма цієї величини

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT_{\text{період}}^* \quad (3.51)$$

- **логарифмічним декрементом затухаючих коливань**. Поняття про декремент затухаючих коливань використовують при експериментальному визначенні коефіцієнта опору середовища.

На фазовій площині зображальна точка при затухаючих коливаннях буде рухатись по спіралі, асимптотично наближуючись до початку координат O (положення рівноваги). Точка O називається особливою точкою типу «*стійкий фокус*» (рис. 3.12).

Як випливає з визначення п. 3.2, *положення рівноваги механічної системи при дії консервативних і дисипативних сил є асимптотично стійким*.

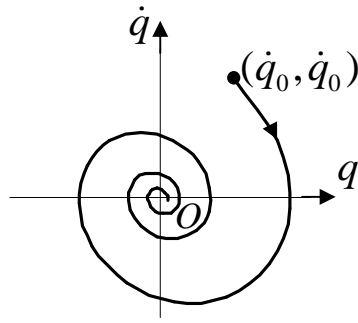


Рисунок 3.12

Висновок. При наявності сил опору характер руху системи залежить від відносної величини коефіцієнта демпфірування h . У випадку великого опору ($h > \omega_0$) коливання не відбуваються (аперіодичний рух). У випадку малого опору ($h < \omega_0$) система здійснює затухаючі коливання, амплітуда яких досить швидко зменшується. При цьому вплив малого опору на колову частоту і період коливань є незначним.

Приклад 7.

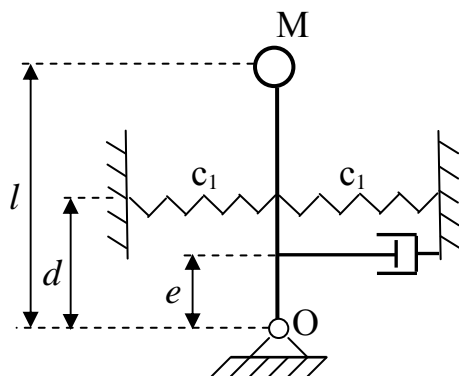


Рисунок 3.13

Визначити період малих коливань астатичного маятника (див. приклад 4, п. 3.3) з приєднанням на відстані e від нижнього кінця стержня демпфером – пристроєм, що створює силу опору, пропорційну швидкості поршню демпфера, і сприяє гасінню коливань (рис. 3.13).

Розв'язання

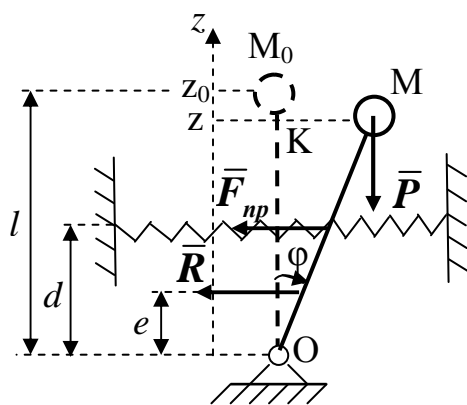


Рисунок 3.14

Розрахункова схема для довільного положення маятника (рис. 3.14) аналогічна рисунку 3.7, п. 3.3, проте на стержень додатково діє сила опору (сила в'язкого тертя) $\bar{R} = -b_1 \bar{v}$, де b_1 – заданий коефіцієнт опору. Складемо рівняння Лагранжа (3.40). Вирази кінетичної T і потенціальної Π енергій були знайдені у прикладі 5, п. 3.6. Знайдемо узагальнену силу Q^D ,

що відповідає дисипативній силі \bar{R} . Для цього скористаємось другим способом визначення узагальненої сили (див. п. 2.2), що базується на співвідношенні (2.7). Обчислимо можливу роботу сили опору як добуток її моменту відносно точки O на можливий кут $\delta\varphi$. Добуток буде від'ємний, оскільки напрями моменту сили і можливого кута $\delta\varphi$ не збігаються:

$$\delta A_R = -|M_O(\bar{R})| \cdot \delta\varphi = -R \cdot e \cdot \delta\varphi = -b_1 v \cdot e \cdot \delta\varphi = -b_1 \dot{\varphi} e \cdot e \cdot \delta\varphi = -b_1 e^2 \dot{\varphi} \cdot \delta\varphi,$$

де $v = \omega \cdot e = \dot{\varphi} \cdot e$ – лінійна швидкість точки стержня, до якої прикладена сила \bar{R} . Множник $Q^D = -b_1 e^2 \dot{\varphi}$ при варіації узагальненої координати $\delta\varphi$ і буде узагальненою силою, що відповідає дисипативній силі \bar{R} .

Обчислимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \dot{\varphi}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= ml^2 \ddot{\varphi}; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= (-mgl + 2c_1 d^2) \varphi. \end{aligned}$$

Тоді рівняння Лагранжа (3.40) набуде вигляду

$$ml^2 \ddot{\varphi} - 0 = -(-mgl + 2c_1 d^2) \varphi - b_1 e^2 \dot{\varphi}.$$

Перетворимо це рівняння до вигляду (3.42):

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} + b_1 e^2 \dot{\varphi} + (2c_1 d^2 - mgl) \varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{b_1 e^2}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{2c_1 d^2 - mgl}{ml^2} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{2c_1 d^2 - mgl}{ml^2}, \quad 2h = \frac{b_1 e^2}{ml^2},$$

отримаємо диференціальне рівняння руху (3.42):

$$\ddot{\varphi} + 2h \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

У випадку $h < \omega_0$ (а саме такими підбираються параметри b_1, e демпфера) система здійснює затухаючі коливання з періодом (див. формулу (3.49))

$$T_{\text{період}}^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2c_1 d^2 - mgl}{ml^2} - \left(\frac{b_1 e^2}{2ml^2}\right)^2}}.$$

Відповідь. Період малих коливань астатичного маятника з демпфером

$$T_{\text{період}}^* = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2c_1 d^2 - mgl}{ml^2} - \left(\frac{b_1 e^2}{2ml^2}\right)^2}}.$$

3.8 Малі вимушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності навколо положення стійкої рівноваги

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на механічну систему, крім консервативних, діє неконсервативна збурююча сила, що явно залежить від часу.

3.8.1 Випадок довільної збурюючої сили

Розглянемо випадок, коли збурююча сила залежить від часу за довільним законом:

$$F_B = F(t).$$

Позначимо відповідну узагальнену силу $Q_F = H(t)$ і складемо рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_F.$$

З урахуванням виразів кінетичної і потенціальної енергій (3.28), (3.29) це рівняння прийме вигляд

$$a\ddot{q} + cq = H(t)$$

або

$$\ddot{q} + \frac{c}{a}q = \frac{H(t)}{a}.$$

Вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad h_B(t) = \frac{H(t)}{a}, \quad (3.52)$$

отримаємо *диференціальне рівняння малих вимушених коливань механічної системи навколо положення стійкої рівноваги*:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h_B(t). \quad (3.53)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.53) зі сталими коефіцієнтами складається із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння:

$$q = q_{\text{заг}} + q_{\text{ч}}. \quad (3.54)$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ має вигляд (3.32)

$$q_{\text{заг}} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (3.55)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.53) будемо розшукувати у формі

$$q_{\text{ч}} = D_1(t) \cos \omega_0 t + D_2(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.56)$$

де $D_1(t), D_2(t)$ – невідомі функції часу. Такий метод визначення частинного розв'язку називається *методом варіації довільних сталих* (методом Лагранжа).

Знайдемо похідну за часом від частинного розв'язку:

$$\dot{q}_{\text{ч}} = \dot{D}_1 \cos \omega_0 t + \dot{D}_2 \sin \omega_0 t - D_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + D_2 \omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Оскільки для пошуку одного частинного розв'язку були введені дві невідомі функції, їх можна підпорядкувати додатковій умові. Поставимо вимогу, щоб виконувалась рівність

$$\dot{D}_1 \cos \omega_0 t + \dot{D}_2 \sin \omega_0 t = 0. \quad (3.57)$$

Тоді

$$\dot{q}_{\text{ч}} = -D_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + D_2 \omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Знайдемо другу похідну за часом від частинного розв'язку:

$$\ddot{q}_{\text{ч}} = -\dot{D}_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{D}_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - D_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - D_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t. \quad (3.58)$$

Підставимо (3.58) і (3.56) у рівняння (3.53):

$$\begin{aligned} -\dot{D}_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{D}_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - \cancel{D_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t} - \cancel{D_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t} + \\ + \cancel{D_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t} + \cancel{D_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t} = h_B(t). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Таким чином, для двох невідомих функцій \dot{D}_1, \dot{D}_2 маємо два рівняння (3.57), (3.59). З рівняння (3.57) виразимо \dot{D}_1 через \dot{D}_2 :

$$\dot{D}_1 = -\dot{D}_2 \frac{\sin \omega_0 t}{\cos \omega_0 t} \quad (3.60)$$

і підставимо в рівняння (3.59):

$$\dot{D}_2 \frac{\sin \omega_0 t}{\cos \omega_0 t} \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{D}_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = h_B(t)$$

або

$$\dot{D}_2 \cdot \omega_0 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = h_B(t) \cos \omega_0 t,$$

звідки

$$\dot{D}_2 = \frac{1}{\omega_0} h_B(t) \cos \omega_0 t. \quad (3.61)$$

З рівняння (3.60)

$$\dot{D}_1 = -\frac{1}{\omega_0} h_B(t) \cancel{\cos \omega_0 t} \cdot \frac{\sin \omega_0 t}{\cancel{\cos \omega_0 t}} = -\frac{1}{\omega_0} h_B(t) \sin \omega_0 t. \quad (3.62)$$

Інтегруючи за часом (3.61) і (3.62), отримаємо вирази для функцій D_1, D_2 :

$$\begin{cases} D_1 = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi \\ D_2 = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t h_B(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi \end{cases}, \quad (3.63)$$

де ξ – змінна інтегрування.

Підставимо (3.63) в (3.56) і внесемо функції $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ під знаки інтегралів, оскільки вони не залежать від змінної ξ :

$$\begin{aligned} q_u &= -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cdot \int_0^t h_B(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) [-\cos \omega_0 t \sin \omega_0 \xi + \sin \omega_0 t \cos \omega_0 \xi] d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin [\omega_0 (t - \xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Нарешті, підставляючи (3.55) і (3.64) у (3.54), отримаємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.53):

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi, \quad (3.65)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов, ω_0 – власна колова частота (колова частота вільних коливань).

Неважко показати, що для довільних початкових умов $q|_{t=0} = q_0, \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0$ сталі інтегрування будуть

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0},$$

оскільки інтеграл, що відповідає частинному розв'язку, при $t = 0$ дорівнює 0. Тоді рівняння (3.65) приймає вигляд

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi. \quad (3.66)$$

Рівняння (3.66) є **рівнянням вимушених коливань** механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги *при довільній збурюючій силі*.

Зауваження 1. При наявності малого опору і довільної збурюючої сили загальний розв'язок (3.65) набуде вигляду

$$q = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + \frac{1}{\omega_0^*} \cdot \int_0^t h_B(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin[\omega_0^*(t - \xi)] d\xi. \quad (3.67)$$

Зауваження 2. За допомогою формул (3.66) або (3.67) знаходять закон вимушених коливань механічних систем при ударних (удар, вибух), раптово прикладених, сейсмічних, вітрових та інших негармонічних діях.

Приклад 8.

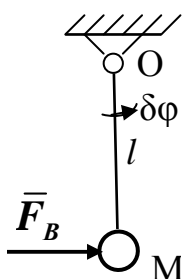


Рисунок 3.15

Визначити рівняння вимушених коливань математичного маятника при дії ударного імпульсу (рис. 3.15). Збурюючу силу в цьому разі можна описати за допомогою δ -функції: $F_B = S \cdot \delta(t)$, де S – величина ударного імпульсу.

Розв'язання

Знайдемо узагальнену силу Q_F , що відповідає збурюючій силі \bar{F}_B . Для цього скористаємось другим способом визначення узагальненої сили (див. п. 2.2), який базується на співвідношенні (2.7). Обчислимо можливу роботу збурюючої сили як добуток її моменту відносно точки O на можливий кут $\delta\varphi$, який потрібно подати маятнику з його вертикального положення (положення, в якому діє ударний імпульс). Добуток буде додатний, оскільки напрями моменту сили і можливого кута $\delta\varphi$ збігаються:

$$\delta A_{F_B} = |M_O(\bar{F}_B)| \cdot \delta\varphi = F_B \cdot l \cdot \delta\varphi = S\delta(t)l\delta\varphi,$$

Множник $Q_F = S\delta(t)l$ при варіації узагальненої координати $\delta\varphi$ і буде узагальненою силою $H(t)$, що відповідає збурюючій силі \bar{F}_B . Тоді згідно з

$$\text{позначенням (3.52) параметр } h_B(t) = \frac{H(t)}{a} = \frac{S\delta(t)l}{ml^2} = \frac{S}{ml}\delta(t).$$

Складемо розв'язок (3.66). При нульових початкових умовах перші два доданки дорівнюють нулю і закон вимушених коливань математичного маятника визначиться за формулою

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi = \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t \frac{S}{ml} \delta(\xi) \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi = \\ &= \frac{S}{ml\omega_0} \cdot \int_0^t \delta(\xi) \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi = \frac{S}{ml\omega_0} \sin[\omega_0(t - 0)] = \frac{S}{ml\omega_0} \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

де ω_0 – колова частота власних (вільних) коливань, що визначається за формулою (3.52) або (3.30):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

а при визначенні інтегралу була врахована властивість δ -функції:

$$\int_0^t \delta(\xi - t_0) f(\xi) d\xi = f(t_0).$$

Відповідь. Після удару математичний маятник здійснюватиме коливальний рух навколо положення рівноваги за гармонійним законом з амплітудою $\frac{S}{ml\omega_0}$

і коловою частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

3.8.2 Випадок гармонійної збурюючої сили

Розглянемо випадок, коли збурююча сила залежить від часу за гармонійним законом і відповідна узагальнена сила

$$Q_F = H \sin \omega_B t. \quad (3.68)$$

В цьому разі $h_B(t) = \frac{H}{a} \sin \omega_B t = h_B \sin \omega_B t$. Визначимо останній доданок формули (3.66):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B \sin \omega_B \xi \cdot \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi = \\ &= \frac{h_B}{\omega_0} \cdot \int_0^t \sin \omega_B \xi \cdot \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Врахуємо формулу тригонометрії:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

$$\text{Тоді} \quad \frac{h_B}{\omega_0} \cdot \int_0^t \sin \omega_B \xi \cdot \sin[\omega_0(t - \xi)] d\xi = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[\int_0^t \cos(\omega_B \xi - \omega_0 t + \omega_0 \xi) d\xi - \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. - \int_0^t \cos(\omega_B \xi + \omega_0 t - \omega_0 \xi) d\xi \right] = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left\{ \int_0^t \cos[\xi(\omega_B + \omega_0) - \omega_0 t] d\xi - \right. \\ & \left. - \int_0^t \cos[\xi(\omega_B - \omega_0) + \omega_0 t] d\xi \right\} = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left\{ \frac{\sin[\xi(\omega_B + \omega_0) - \omega_0 t] \Big|_0^t}{\omega_B + \omega_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin[\xi(\omega_B - \omega_0) + \omega_0 t] \Big|_0^t}{\omega_B - \omega_0} \right\} = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[\frac{\sin \omega_B t + \sin \omega_0 t}{\omega_B + \omega_0} - \frac{\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t}{\omega_B - \omega_0} \right] = \\ & = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[\frac{\cancel{\omega_B} \sin \omega_B t - \omega_0 \sin \omega_B t + \omega_B \sin \omega_0 t - \cancel{\omega_0} \sin \omega_0 t}{\omega_B^2 - \omega_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{-\cancel{\omega_B} \sin \omega_B t - \omega_0 \sin \omega_B t + \omega_B \sin \omega_0 t + \cancel{\omega_0} \sin \omega_0 t}{\omega_B^2 - \omega_0^2} \right] = \\ & = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[\frac{-2\omega_0 \sin \omega_B t + 2\omega_B \sin \omega_0 t}{\omega_B^2 - \omega_0^2} \right] = \frac{h_B \sin \omega_B t}{\omega_0^2 - \omega_B^2} - \frac{\omega_B}{\omega_0} \cdot \frac{h_B \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок (3.66) набуде вигляду

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_B}{\omega_0} \cdot \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (3.69)$$

Рівняння (3.69) є **рівнянням вимушених коливань** механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги *при гармонійній збурюючій силі*.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань при гармонійній збурюючій силі*:

1) вимушені коливання є *бігармонійними*, тобто складаються з вільних коливань з частотою ω_0 (описуються першими трьома доданками рівняння (3.69)) і чисто вимушених коливань з частотою збурюючої сили ω_B (останній доданок рівняння (3.69)). При цьому вільні коливання збуджуються і при нульових початкових умовах (третій доданок описує власні коливання, які спричиняються збурюючою силою і не залежать від початкових умов);

2) амплітуда чисто вимушених коливань $|A_B| = \frac{h_B}{|\omega_0^2 - \omega_B^2|}$ не залежить від

початкових умов, а визначається параметрами збурюючої сили і системи;

3) колова частота чисто вимушених коливань ω_B не залежить від параметрів системи, а визначається збурюючою силою;

4) за умови $\omega_B = \omega_0$ амплітуда вимушених коливань $|A_B| \rightarrow \infty$, тобто необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається **резонансом**, а рівність $\omega_B = \omega_0$ є умовою резонансу.

3.8.3 Коефіцієнт динамічності при дії гармонійної збурюючої сили

Простежимо залежність амплітуди чисто вимушених коливань $|A_B|$ від відношення частот вимушених і власних коливань $z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$. Перетворимо формулу для амплітуди $|A_B|$:

$$|A_B| = \frac{h_B}{|\omega_0^2 - \omega_B^2|} = \frac{\frac{h_B}{\omega_0^2}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{\frac{H}{a} \cdot \frac{a}{c}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{\frac{H}{c}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{q_{cm}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{q_{cm}}{|1 - z^2|}, \quad (3.70)$$

де q_{cm} – *статичне відхилення* системи від положення рівноваги під дією сталої сили H , що дорівнює амплітуді узагальненої збурюючої сили.

Коефіцієнтом динамічності μ називається відношення амплітуди вимушених коливань $|A_B|$ до статичного відхилення $q_{ст}$:

$$\mu = \frac{|A_B|}{q_{ст}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{1}{|1 - z^2|}. \quad (3.71)$$

З формули (3.71) випливає, що коефіцієнт динамічності є *власною характеристикою* коливальної системи, яка не залежить від амплітуди збурення. Він *показує*, у скільки разів амплітуда вимушених коливань перевершує статичне відхилення, *характеризує* динамічний ефект, що викликається збурюючою силою і *залежить* тільки від відношення частот вимушених і власних коливань ($z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$).

З урахуванням опору середовища формула (3.71) прийме вигляд

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (3.72)$$

де $\beta = \frac{h}{\omega_0}$ – безрозмірний коефіцієнт демпфірування (відносно

демпфірування).

Графік коефіцієнта динамічності (3.72) для декількох значень безрозмірного коефіцієнта демпфірування β наведений на рисунку 3.16.

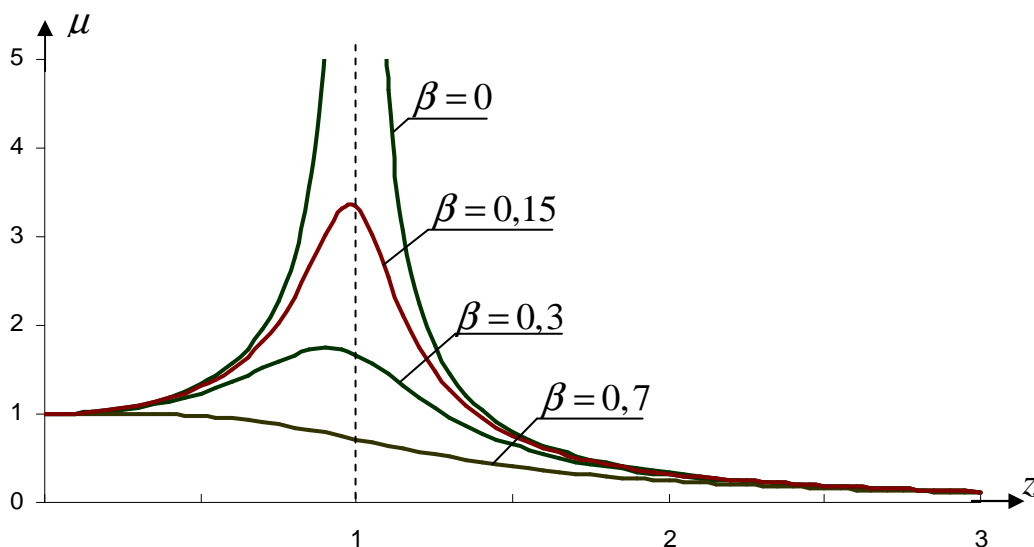


Рисунок 3.16

Аналізуючи рисунок 3.16, можна зробити такі висновки:

- 1) при значеннях безрозмірної частоти z достатньо великих і достатньо малих у порівнянні з $z = 1$ коефіцієнт динамічності (a , отже, і амплітуда вимушених коливань) мало залежить від опору середовища. Навпаки, при z близьких до $z = 1$ вплив опору на коефіцієнт динамічності достатньо суттєвий;
- 2) при $z \rightarrow \infty$ коефіцієнт динамічності асимптотично наближається до нуля. Це означає, що якою б великою не була амплітуда збурюючої сили, вимушені коливання будуть досить малими, якщо частота збурюючої сили набагато більша за власну;
- 3) коефіцієнт динамічності набуває максимуму при значенні z трохи меншим (якщо бути точними, при $z = \sqrt{1 - 2\beta^2}$) за резонансне значення $z = 1$. При цьому при збільшенні коефіцієнта опору β зсув максимуму збільшується;
- 4) при резонансі у поєднанні з малим значенням коефіцієнта опору β амплітуда вимушених коливань може бути досить значною навіть при невеликій амплітуді збурюючої сили;
- 5) при значенні коефіцієнта опору $\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ зростання амплітуди вимушених коливань в зоні резонансу не відбувається, більше того, за будь-якою частоти збурюючої сили амплітуда вимушених коливань не перевищує статичне відхилення $q_{ст}$.

Приклад 9. Кінетична енергія механічної системи $T = 2\dot{x}^2$, потенціальна енергія $\Pi = 8x^2$, де x – узагальнена координата. На систему діє гармонійна збурююча сила, якій відповідає узагальнена сила $Q_F = 10 \cdot \sin(1,414 \cdot t)$. Визначити коефіцієнт динамічності системи.

Розв’язання

Визначимо узагальнений коефіцієнт інерції шляхом порівняння заданої кінетичної енергії з формулою (3.28): $a = 4$.

Визначимо узагальнений коефіцієнт жорсткості шляхом порівняння заданої потенціальної енергії з формулою (3.29): $c = 16$.

Визначимо власну колову частоту системи за формулою (3.30):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \text{ (рад/с)}.$$

Колова частота вимушених коливань, що витікає з порівняння формул заданої збурюючої сили і (3.68), дорівнює $\omega_B = 1,414$ (рад/с).

Коефіцієнт динамічності згідно з формулою (3.71) дорівнює

$$\mu = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega_B}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{1,414}{2}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{2}\right|} = 2.$$

Відповідь. Коефіцієнт динамічності $\mu = 2$. Це означає, що у даній системі амплітуда вимушених коливань у 2 рази перевищує статичне відхилення під дією такої ж за максимальним значенням, але статичної сили.

Питання для самоконтролю

1. Як визначити положення рівноваги консервативної системи?
2. Наведіть визначення (математичне і фізичне) стійкості положення рівноваги механічної системи.
3. Наведіть визначення (математичне і фізичне) асимптотичної стійкості положення рівноваги механічної системи.
4. Як визначити стійкість положення рівноваги консервативної системи з одним ступенем вільності?
5. Як визначити стійкість положення рівноваги консервативної системи зі скінченним числом ступенів вільності?
6. Які параметри називають узагальненими коефіцієнтами жорсткості?
7. Які параметри називають узагальненими коефіцієнтами інерції?
8. Наведіть рівняння і графіки вільних коливань консервативної системи.
9. Як визначається колова частота малих вільних коливань?
10. Наведіть властивості малих власних коливань консервативної системи.
11. Які сили називають дисипативними?
12. Які коливання відбуваються під дією консервативних і дисипативних сил? Наведіть рівняння і графіки цих коливань.
13. Як визначається період малих затухаючих коливань?
14. Запишіть рівняння вимушених коливань механічної системи при дії довільної збурюючої сили.
15. Що називається коефіцієнтом динамічності, від чого він залежить?
16. Наведіть властивості коефіцієнта динамічності.
17. Як визначається відносне демпфірування, наведіть його властивості.

4 Малі коливання механічних систем зі скінченним числом степенів вільності навколо положення стійкої рівноваги

4.1 Вільні коливання консервативної системи з двома степенями вільності

Розглянемо консервативну систему з голономними й стаціонарними в'язями, яка має два степеня вільності. Положення системи будемо визначати узагальненими координатами q_1, q_2 , що відлічуються від положення стійкої рівноваги.

Кінетична енергія системи з урахуванням симетрії узагальнених коефіцієнтів інерції ($a_{12} = a_{21}$) буде мати вигляд

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad (4.1)$$

де для малих коливань

$$\begin{aligned} a_{11}(q_1, q_2) &\approx a_{11}(0, 0) = a_{11} = \text{const}, \\ a_{12}(q_1, q_2) &\approx a_{12}(0, 0) = a_{12} = \text{const}, \\ a_{22}(q_1, q_2) &\approx a_{22}(0, 0) = a_{22} = \text{const}. \end{aligned}$$

При цьому оскільки при русі системи $T > 0$ (тобто T є додатно-визначеною квадратичною формою), то згідно з критерієм Сільвестра має виконуватись співвідношення

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Потенціальна енергія для малих коливань з урахуванням симетрії узагальнених коефіцієнтів жорсткості ($c_{12} = c_{21}$) визначається за формулою

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (4.2)$$

Зважаючи на стійкість положення рівноваги, за критерієм Сільвестра повинно бути:

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \end{cases} \quad (4.3)$$

які, враховуючи формули (4.1) і (4.2), приймуть вигляд

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = -c_{11}q_1 - c_{12}q_2, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 = -c_{12}q_1 - c_{22}q_2. \end{cases}$$

Перенесемо шукані функції часу у ліву частину рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) називаються **диференціальними рівняннями малих вільних коливань консервативної системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги**. Це – система двох звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Розв’язок системи (4.4) будемо шукати у вигляді

$$q_1 = A \sin(\omega t + \varepsilon), \quad q_2 = B \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (4.5)$$

де $A, B, \omega, \varepsilon$ – невідомі сталі величини.

Підставимо (4.5) у (4.4):

$$\begin{cases} (-a_{11}\omega^2 A - a_{12}\omega^2 B + c_{11}A + c_{12}B) \sin(\omega t + \varepsilon) = 0, \\ (-a_{12}\omega^2 A - a_{22}\omega^2 B + c_{12}A + c_{22}B) \sin(\omega t + \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

відкинемо множник $\sin(\omega t + \varepsilon)$ (для довільного t він не дорівнює 0) і згрупуємо доданки відносно величин A і B :

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}\omega^2)A + (c_{12} - a_{12}\omega^2)B = 0, \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2)A + (c_{22} - a_{22}\omega^2)B = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Як відомо з курсу математики, щоб рівняння (4.6) мали не рівний нулю розв’язок (що є випадком спокою, а не руху), визначник цієї системи має дорівнювати нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{12} - a_{12}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Вираз (4.7) відбиває умову існування відмінного від нуля розв’язку для величин A і B .

Розкриваючи визначник (4.7), отримаємо:

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) називається **частотним рівнянням**. Корені цього рівняння ω_1^2 і ω_2^2 (при цьому завжди будемо давати меншому кореню індекс 1)

визначають **колові частоти вільних коливань**, або **власні частоти** ω_1 і ω_2 . Обидва корені рівняння (4.8) відносно ω^2 : ω_1^2 і ω_2^2 , мають бути додатними, інакше координати q_1 і q_2 будуть необмежено зростати, чого не може бути при малих коливаннях навколо положення стійкої рівноваги.

Зауваження. Якщо для системи (4.6) виконується $a_{12} = 0$, $c_{12} = 0$, то вона розпадається на два незалежних рівняння, для яких відповідні частоти будуть:

$$(\omega_1^{парц})^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad (\omega_2^{парц})^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}. \quad (4.9)$$

Частоти $\omega_1^{парц}$ і $\omega_2^{парц}$ називаються **парціальними частотами**. Можна показати [3, 7], що в загальному випадку парціальні частоти розташовуються всередині відрізка частот між першою і другою власними частотами ω_1 і ω_2 :

$$\omega_1 < \omega_1^{парц} < \omega_2^{парц} < \omega_2.$$

Кожній власній частоті ω_1 і ω_2 буде відповідати один частинний розв'язок (4.5) зі своїми значеннями величин A , B , ε .

Загальний розв'язок системи (4.4) отримаємо як лінійну комбінацію незалежних частинних розв'язків (4.5):

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 = B_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \end{cases} \quad (4.10)$$

Коливання, що відповідають частотам ω_1 і ω_2 , називаються **головними**. Менша частота ω_1 називається **основною**, а відповідне головне коливання – **основним**.

Якщо в рівняння (4.6) підставити знайдені ω_1 і ω_2 , то визначник (4.7) дорівнюватиме нулю. У цьому разі в системі рівнянь (4.6) незалежним буде тільки одне рівняння. Візьмемо, наприклад, перше і знайдемо з нього відношення амплітуд частинних розв'язків:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2}, \\ \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Коефіцієнти μ_1, μ_2 називаються **коефіцієнтами форми коливань**. Вони *дорівнюють* відношенням амплітуд узагальнених координат у кожному з головних коливань і *показують*, у скільки разів амплітуда коливань в одній з координат (q_2) більша за амплітуду коливань в іншій координаті (q_1). За допомогою коефіцієнтів форм будується **форма коливань** – розподілення амплітуд переміщень точок системи у відповідному головному коливанні. З рівнянь (4.11) виходить, що $B_1 = \mu_1 A_1$, $B_2 = \mu_2 A_2$. Підставимо ці співвідношення у (4.10):

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \end{cases} \quad (4.12)$$

де довільні сталі $A_1, A_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ визначаються за допомогою початкових умов.

Рівняння (4.12) є **рівняннями малих вільних коливань консервативної системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги**.

Розглянемо **властивості вільних коливань**:

1) якщо система виконує одне з головних коливань (наприклад у випадку $A_2 = 0$), то обидві узагальнені координати q_1, q_2 змінюються з однаковими частотою ω_1 і фазою $\omega_1 t + \varepsilon_1$, тобто координати змінюються синхронно;

2) власні частоти ω_1 і ω_2 , а також коефіцієнти форми μ_1, μ_2 не залежать від початкових умов, а визначаються тільки параметрами механічної системи і є **основними характеристиками малих вільних коливань механічної системи**;

3) кожне з головних коливань є гармонійним, але результуюче не є гармонійним. Воно утворюється накладенням одне на друге головних незалежних коливань з різними частотами ω_1 і ω_2 ;

4) у випадку малого опору ($h_1 < \omega_1$, $h_2 < \omega_2$) розв'язок (4.12) буде матиме вигляд:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 e^{-h_1 t} \sin(\omega_1^* t + \varepsilon_1) + A_2 e^{-h_2 t} \sin(\omega_2^* t + \varepsilon_2), \\ q_2 = \mu_1 A_1 e^{-h_1 t} \sin(\omega_1^* t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 e^{-h_2 t} \sin(\omega_2^* t + \varepsilon_2), \end{cases} \quad (4.13)$$

де $h_1, h_2, \omega_1^*, \omega_2^*$ – дійсні й уявні частини комплексних коренів частотного рівняння вигляду (4.8). Таким чином, малі коливання при наявності опору будуть затухаючими.

Приклад 1.

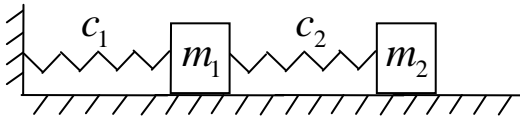


Рисунок 4.1

Визначити власні частоти і коефіцієнти форм малих коливань механічної системи, що складається з двох вантажів масами m_1, m_2 , які з'єднані між собою і з нерухомою опорою двома пружинами жорсткості c_1, c_2 відповідно (рис. 4.1). Тертям між вантажами і горизонтальною поверхнею знехтувати. Розглянути випадок наступних співвідношень між масами і жорсткостями: $c_1 = c_2 = c, m_1 = 2m, m_2 = m, \frac{c}{m} = 8 \text{ (рад/с)}^2$.

Розв'язання

Зобразимо механічну систему у довільному положенні (рівні 3 на рис. 4.2). Система має два степеня вільності і за узагальнені координати q_1, q_2

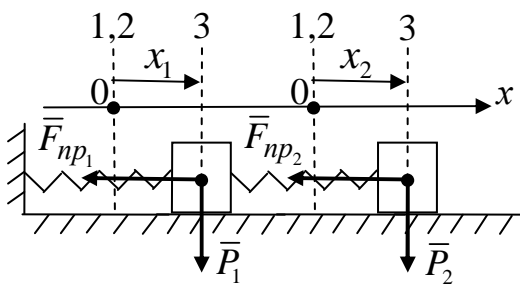


Рисунок 4.2

прийmemo декартові координати $q_1 = x_1, q_2 = x_2$, що відлічуються від відповідних положень рівноваги вантажів (рівні 2). Ці положення для горизонтальних пружин збігаються з кінцями недеформованих пружин (рівні 1). Узагальненими швидкостями будуть проекції швидкостей вантажів на горизонтальну вісь x :

$$\dot{q}_1 = V_{x_1} = \dot{x}_1, \dot{q}_2 = V_{x_2} = \dot{x}_2.$$

Активними силами, що діють на систему, будуть консервативні сили ваги вантажів $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}, \bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$ і сили пружності пружин $\bar{F}_{np1}, \bar{F}_{np2}$.

Вантажі здійснюють поступальний рух, тому кінетична енергія системи дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2. \quad (4.14)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.1), знаходимо узагальнені коефіцієнти інерції як множники при відповідних узагальнених швидкостях:

$$a_{11} = m_1, a_{12} = 0, a_{22} = m_2. \quad (4.15)$$

Потенціальна енергія системи складається з потенціальних енергій сил ваги вантажів і двох пружин:

$$\Pi = \Pi_{P_1} + \Pi_{P_2} + \Pi_{F_{np1}} + \Pi_{F_{np2}}.$$

За нульове положення приймемо положення рівноваги системи. Оскільки різниця висот між довільним і нульовим положеннями вантажів дорівнює нулю, то згідно з формулою (2.11)

$$\Pi_{P_1} = \Pi_{P_2} = 0.$$

В положенні рівноваги пружини недеформовані, в довільному положенні деформація першої пружини дорівнює $\lambda_1 = x_1$, а другої, враховуючи переміщення першого вантажу (або точки закріплення другої пружини) $\lambda_2 = x_2 - x_1$. Тому, зважаючи на формулу (2.12), отримаємо

$$\Pi_{F_{np1}} = \frac{1}{2} c_1 x_1^2, \quad \Pi_{F_{np2}} = \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Таким чином, потенціальна енергія системи дорівнює

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} (c_1 + c_2) x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.2), знаходимо узагальнені коефіцієнти жорсткості як множники при відповідних узагальнених координатах:

$$c_{11} = c_1 + c_2, \quad c_{12} = -c_2, \quad c_{22} = c_2. \quad (4.17)$$

Складемо частотне рівняння (4.8). З урахуванням формул (4.15), (4.17) і чисельних даних задачі воно набуде вигляду

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11} \omega^2)(c_{22} - a_{22} \omega^2) - (c_{12} - a_{12} \omega^2)^2 &= \\ = [(c_1 + c_2) - m_1 \omega^2](c_2 - m_2 \omega^2) - (-c_2 - 0 \cdot \omega^2)^2 &= \\ = (2c - 2m\omega^2)(c - m\omega^2) - c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Перетворимо останній вираз до біквadratного рівняння

$$2m^2 \omega^4 - 4mc \omega^2 + c^2 = 0$$

або

$$\omega^4 - 2 \left(\frac{c}{m} \right) \omega^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2 = 0. \quad (4.18)$$

Знайдемо корені алгебраїчного рівняння (4.18):

$$\omega_{1,2}^2 = \left(\frac{c}{m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2} = \frac{c}{m} \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right) = 8 \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right) = 4(2 \pm \sqrt{2}).$$

Отже, власні частоти системи дорівнюють:

$$\omega_1 = \sqrt{4(2 - \sqrt{2})} = 2\sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 2\sqrt{0,6} \approx 1,55 \text{ рад/с};$$

$$\omega_2 = \sqrt{4(2 + \sqrt{2})} = 2\sqrt{(2 + \sqrt{2})} \approx 2\sqrt{3,4} \approx 3,69 \text{ рад/с}.$$

Визначимо коефіцієнти форм коливань системи. З урахуванням виразів для узагальнених коефіцієнтів інерції і жорсткості (4.15), (4.17) і даних задачі рівняння (4.11) для коефіцієнтів форм коливань набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} = -\frac{2c - 2m\omega_1^2}{-c} = 2\frac{\frac{c}{m} - \omega_1^2}{\frac{c}{m}} = 2\frac{\frac{c}{m} - \frac{c}{m}\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{c}{m}} = \\ &= 2\frac{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{1} = 2\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \sqrt{2} \approx 1,4, \\ \mu_2 &= -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = 2\frac{\frac{c}{m} - \frac{c}{m}\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{c}{m}} = 2\frac{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{1} = -2\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\sqrt{2} \approx -1,4. \end{aligned}$$

Побудуємо, згідно з коефіцієнтами форм μ_1, μ_2 , епюри власних форм коливань (рис. 4.3, а і 4.3, б відповідно):

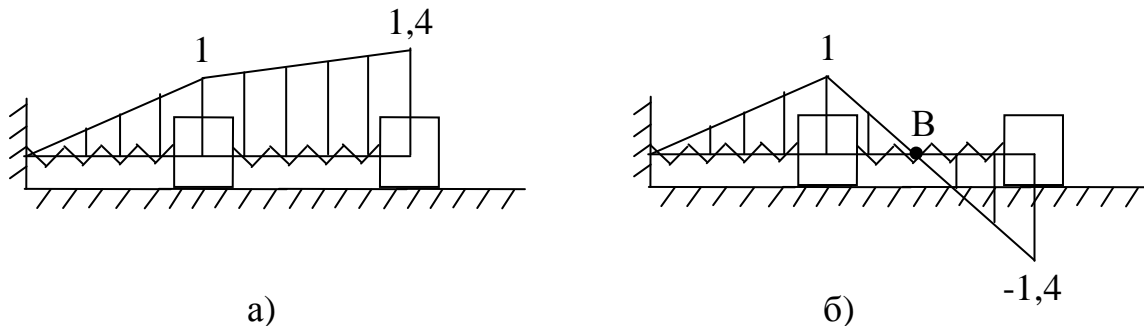


Рисунок 4.3

Відповідь. Власні частоти системи $\omega_1 = 1,55$ (рад/с); $\omega_2 = 3,69$ (рад/с).

Коефіцієнти форм коливань $\mu_1 = 1,4$; $\mu_2 = -1,4$. Як видно з рисунків, перша форма коливань є *безвузловою* (рис. 4.3, а). При коливаннях за цією формою всі точки системи, в тому числі і обидва вантажі, будуть рухатись з однаковою частотою ω_1 в одному напрямку, але з різними амплітудами. Амплітуда коливань другого вантажу буде у 1,4 рази більша за амплітуду коливань першого вантажу. Друга форма є *одновузловою*, тобто одна точка системи (точка В, рис. 4.3, б) буде при коливаннях за цією формою нерухомою. Точки системи, що знаходяться по різні боки від нерухомої точки В (в тому числі і обидва вантажі), будуть рухатись з однаковою частотою ω_2 , але у протилежних напрямках. Амплітуда коливань другого вантажу буде також у 1,4 рази більша за амплітуду коливань першого вантажу.

4.2 Вимушені коливання системи з двома степенями вільності

Припустимо, що до консервативної системи, яка рухається поблизу положення стійкої рівноваги, прикладені збурюючі сили. Нехай відповідні їм узагальнені збурюючі сили є гармонійними, мають однакову колову частоту ω_B , але різні амплітуди H_1 і H_2 :

$$\begin{cases} Q_{1F} = H_1 \sin \omega_B t, \\ Q_{2F} = H_2 \sin \omega_B t. \end{cases} \quad (4.19)$$

Складаючи рівняння Лагранжа другого роду за методикою п. 4.1, отримаємо диференціальні рівняння руху системи, ліві частини яких є рівняннями (4.4):

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin \omega_B t, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin \omega_B t. \end{cases} \quad (4.20)$$

Рівняння (4.20) називаються *диференціальними рівняннями малих вимушених коливань механічної системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги*. Це – система двох звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок системи (4.20) складається із загального розв'язку (4.12) відповідної однорідної системи рівнянь і частинного розв'язку даної неоднорідної системи. Будемо шукати частинний розв'язок у вигляді

$$q_{1B} = A_{1B} \sin \omega_B t, \quad q_{2B} = A_{2B} \sin \omega_B t. \quad (4.21)$$

Підставляючи функції (4.21) і їх другі похідні за часом у систему (4.20) і скорочуючи на множник $\sin \omega_B t$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}\omega_B^2)A_{1B} + (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)A_{2B} = H_1, \\ (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)A_{1B} + (c_{22} - a_{22}\omega_B^2)A_{2B} = H_2. \end{cases} \quad (4.22)$$

Розв'язок неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера має вигляд:

$$A_{1B} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_{2B} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи (4.22), Δ_1, Δ_2 — визначники, в яких відповідно перший і другий стовпці замінені на стовпець правої частини системи (4.22). Розкриваючи визначники, отримаємо:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}, \\ A_{2B} &= \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Зважаючи на те, що головний визначник Δ є багаточленом відносно ω_B^2 вигляду (4.8), його коренями будуть власні частоти ω_1 і ω_2 . У такому разі його можна записати у формі

$$\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2),$$

а формули (4.23) — у вигляді:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)}, \\ A_{2B} &= \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Тоді з урахування (4.12) і (4.24) загальний розв'язок системи (4.20) буде:

$$\left\{ \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \\ &\quad + \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)} \cdot \sin \omega_B t, \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \\ &\quad + \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)} \cdot \sin \omega_B t. \end{aligned} \right. \quad (4.25)$$

Рівняння (4.25) є **рівняннями малих вимушених коливань системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги**.

Проаналізуємо властивості вимушених коливань:

1) перші два доданки у рівняннях системи (4.25) описують власні коливання, що відбуваються з частотами ω_1 і ω_2 . Власні частоти ω_1 , ω_2 і коефіцієнти форм μ_1, μ_2 не залежать від початкових умов, а визначаються тільки параметрами механічної системи. Амплітуди A_1, A_2 і початкові фази $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ визначаються за допомогою початкових умов;

2) останні доданки в рівняннях системи (4.25) описують чисто вимушені коливання, що відбуваються з частотою ω_B збурюючих сил Q_{1F} і Q_{2F} . Амплітуди вимушених коливань $|A_{1B}|$, $|A_{2B}|$ не залежать від початкових умов, а визначаються параметрами механічної системи і збурюючих сил. При $\omega_B = \omega_1$ або $\omega_B = \omega_2$ амплітуди вимушених коливань необмежено зростають, тобто в механічній системі виникає явище **резонансу**.

4.3 Динамічний гаситель коливань

Розглянемо випадок, коли одна із збурюючих сил дорівнює нулю: $Q_{2F} = 0$ (тобто $H_2 = 0$). У цьому разі формули (4.23) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}, \\ A_{2B} &= \frac{-H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Якщо також буде виконуватись рівність $c_{22} - a_{22}\omega_B^2 = 0$, тобто при

$$\omega_B^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad (4.27)$$

формули (4.26) матимуть вигляд

$$A_{1B} = 0, \\ A_{2B} = \frac{-H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) \cdot 0 - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2} = \frac{H_1}{c_{12} - a_{12}\omega_B^2}. \quad (4.28)$$

Проаналізуємо отримані результати

При виконанні умови (4.27) вимушені коливання, що відповідають першій узагальненій координаті, *погашаються* ($A_{1B} = 0$). На цьому принципі заснована теорія **динамічних гасителів коливань**: якщо до тіла з пружною в'яззю (системи з одним степенем вільності), яке здійснює вимушені коливання в області резонансу (тобто при $\omega_B \approx \omega_0$), приєднати інше тіло з пружною в'яззю і підібрати його параметри так, щоб виконувалась умова (4.27), то вимушені коливання першого тіла повністю погашаються.

Розглянемо методику розрахунку динамічного гасителя коливань

Нехай вантаж маси m_1 , який зв'язаний з нерухомою опорою пружиною жорсткості c_1 , здійснює вимушені коливання під дією збурюючої сили $Q_{1F} = H_1 \sin \omega_B t$ в зоні резонансу (рис. 4.4).

Приєднаємо далі до системи додатковий вантаж маси m_2 за допомогою пружини жорсткості c_2 (рис. 4.5). При цьому отримаємо консервативну систему з двома степенями вільності.

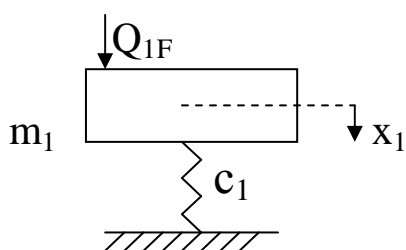


Рисунок 4.4

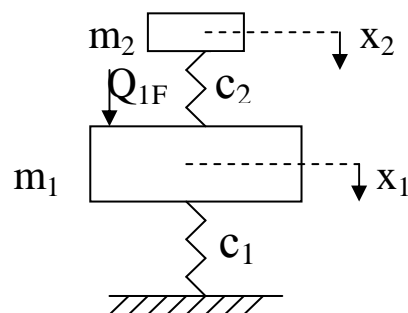


Рисунок 4.5

Положення вантажів будемо визначати за допомогою декартових координат ($q_1 = x_1, q_2 = x_2$), які відлічуються від положень рівноваги вантажів.

Кінетична енергія такої системи буде:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2).$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.1), зробимо висновок, що для даної задачі узагальнені коефіцієнти інерції будуть:

$$a_{11} = m_1, a_{12} = 0, a_{22} = m_2.$$

Потенціальна енергія даної системи має вигляд

$$П = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2)x_1^2 - 2c_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2].$$

Порівнюючи останній вираз з формулою (4.2), отримаємо співвідношення для узагальнених коефіцієнтів жорсткості:

$$c_{11} = c_1 + c_2, c_{12} = -c_2, c_{22} = c_2.$$

Тоді умовою гасіння коливань (4.27) першого вантажу буде співвідношення

$$\omega_B^2 = \frac{c_2}{m_2}. \quad (4.29)$$

При цьому формули (4.28) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} A_{1B} &= 0, \\ A_{2B} &= -\frac{H_1}{c_2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

а чисто вимушені коливання вантажів (4.21) будуть описуватись рівняннями:

$$\begin{aligned} x_{1B} &= 0, \\ x_{2B} &= -\frac{H_1}{c_2} \cdot \sin \omega_B t. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Співвідношення (4.29) визначає тільки відношення коефіцієнта жорсткості c_2 до маси m_2 другого вантажу. Тому жорсткість c_2 підбирають так, щоб амплітуда вимушених коливань другого вантажу не перевищувала певного значення $A_{\text{задане}}$:

$$|A_{2B}| = \frac{H_1}{c_2} \leq A_{\text{задане}}. \quad (4.32)$$

Фізична сутність гасіння коливань: при збільшенні за часом збурюючої сили в напрямку першої узагальненої координати x_1 другий вантаж переміщується в протилежному напрямку (про це свідчить знак «-» в формулі (4.31)) і створює пружну силу другої пружини, що компенсує дію збурюючої сили. В цьому випадку перший вантаж у вимушених коливаннях участі не бере, а здійснює тільки вільні коливання, які з часом затухають.

Зауваження. Якщо умова (4.29) не виконується, механічна система стає звичайною системою з двома степенями вільності і має дві власні частоти ω_1 і ω_2 . Амплітудно-частотна характеристика системи (залежності (4.26) амплітуд вимушених коливань $|A_{1B}|$ і $|A_{2B}|$ від частоти збурюючої сили ω_B) у випадку $H_1 = 1$ Н, $c_1 = c_2 = 1$ Н/м, $m_1 = m_2 = 1$ кг наведена на рисунку 4.6, де крива 1 відповідає амплітуді $|A_{1B}|$, крива 2 – амплітуді $|A_{2B}|$. На резонансних частотах $\omega_B = \omega_1 = 0,6$ рад/с і $\omega_B = \omega_2 = 1,6$ рад/с амплітуди вимушених коливань необмежено зростають: $|A_{1B}| \rightarrow \infty$, $|A_{2B}| \rightarrow \infty$.

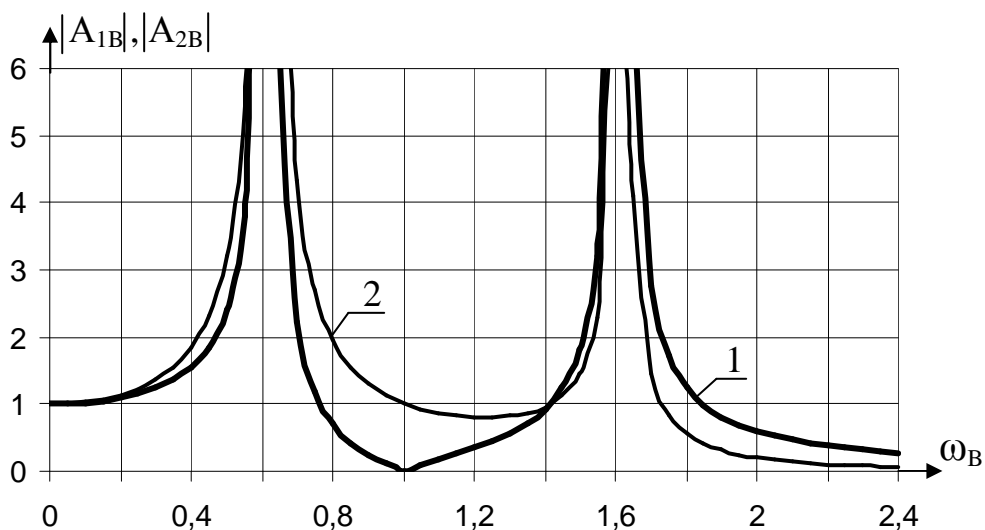


Рисунок 4.6

Таким чином, якщо частота збурюючої сили змінюється у широких межах, виникає небезпека двох нових резонансних режимів. Тому динамічний гаситель коливань можна застосовувати в досить стабільних системах (наприклад, в турбогенераторах). Якщо частота збурювання змінюється у широких межах (наприклад, в поршневих компресорах, двигунах внутрішнього згорання і т.п.), то динамічний гаситель конструюється із затуханням. У такому разі нові резонансні режими не будуть небезпечними.

4.4 Використання коефіцієнтів податливості для дослідження коливань системи з двома степенями вільності

При складанні диференціальних рівнянь руху механічної системи визначення потенціальної енергії викликає у ряді випадків певне ускладнення. У таких випадках суттєво спрощує розв'язання задачі використання коефіцієнтів податливості замість узагальнених коефіцієнтів жорсткості.

4.4.1 Вільні коливання

Розглянемо консервативну систему з голономними й стаціонарними в'язями, яка має два степеня вільності. Її положення будемо визначати узагальненими координатами q_1, q_2 , що відлічуються від положення стійкої рівноваги. Рух системи навколо положення стійкої рівноваги описується диференціальними рівняннями (4.4). Виділимо в цій системі рівнянь доданки, що містять узагальнені координати q_1, q_2 :

$$\begin{cases} c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = -(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2), \\ c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = -(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2). \end{cases} \quad (4.33)$$

Систему (4.33) можна розглядати як неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно q_1, q_2 . Її розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{c_{22}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2)}{\Delta} + \frac{c_{12}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2)}{\Delta}, \\ q_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{c_{12}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2)}{\Delta} - \frac{c_{11}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2)}{\Delta}, \end{cases} \quad (4.34)$$

де Δ — головний визначник системи (4.33), Δ_1, Δ_2 — визначники, в яких відповідно перший і другий стовпці замінені на стовпець правої частини системи (4.33).

Введемо позначення

$$\delta_{11} = \frac{c_{22}}{\Delta}, \quad \delta_{12} = -\frac{c_{12}}{\Delta}, \quad \delta_{22} = \frac{c_{11}}{\Delta}. \quad (4.35)$$

Тоді рівняння (4.34) набудуть вигляду

$$\begin{cases} q_1 = -\delta_{11}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) - \delta_{12}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2), \\ q_2 = -\delta_{12}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) - \delta_{22}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2). \end{cases} \quad (4.36)$$

Величини δ_{ij} називаються **коефіцієнтами податливості (впливу)** або **одиначними переміщеннями**, а формули (4.36) являють собою диференціальні рівняння малих вільних коливань консервативної системи з двома степенями вільності, в яких замість узагальнених коефіцієнтів жорсткості використовуються коефіцієнти податливості.

Фізичний зміст коефіцієнтів податливості можна встановити з таких міркувань. Нехай до системи, що може рухатись під дією консервативних сил $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_N\}$, прикладені зрівноважуючі їх сили $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N\}$. В цьому положенні рівноваги узагальнені сили, що відповідають узагальненим координатам q_1, q_2 , згідно з (2.15) дорівнюють нулю

$$Q_1 = Q_{1P} + Q_{1F} = 0, \quad Q_2 = Q_{2P} + Q_{2F} = 0, \quad (4.37)$$

де $Q_{1P}, Q_{2P}, Q_{1F}, Q_{2F}$ – узагальнені сили відповідних систем сил.

Узагальнені сили консервативної системи з двома степенями вільності, відповідно до (2.13), дорівнюють

$$\begin{cases} Q_{1P} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -(c_{11}q_1 + c_{12}q_2), \\ Q_{2P} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -(c_{12}q_1 + c_{22}q_2). \end{cases} \quad (4.38)$$

Розв'язок системи неоднорідних алгебраїчних рівнянь (4.38) відносно q_1, q_2 , зважаючи на позначення (4.35), матиме вигляд

$$\begin{cases} q_1 = -(\delta_{11}Q_{1P} + \delta_{12}Q_{2P}), \\ q_2 = -(\delta_{12}Q_{1P} + \delta_{22}Q_{2P}), \end{cases} \quad (4.39)$$

або, враховуючи (4.37), отримаємо

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11}Q_{1F} + \delta_{12}Q_{2F}, \\ q_2 = \delta_{12}Q_{1F} + \delta_{22}Q_{2F}. \end{cases} \quad (4.40)$$

З (4.40) випливає, що коефіцієнт податливості δ_{ij} чисельно дорівнює значенню узагальненої координати q_i , якщо всі узагальнені сили, окрім Q_{jF} , дорівнюють нулю, а Q_{jF} дорівнює одиниці.

Зауваження 1. Поняття податливості тісно пов'язане з поняттям жорсткості. Як витікає з формул (4.35), матриці податливості і жорсткості

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

є взаємно оберненими величинами

$$\delta = c^{-1}. \quad (4.41)$$

Розглянемо далі розв'язання системи диференціальних рівнянь вільних коливань (4.36). Розв'язок системи, як і у п. 4.1, будемо розшукувати у вигляді (4.5). Підставляючи (4.5) у (4.36) і скорочуючи всі доданки на множник $\sin(\omega t + \varepsilon)$, отримаємо систему рівнянь відносно A і B :

$$\begin{cases} [(\delta_{11}a_{11} + \delta_{12}a_{12})\omega^2 - 1] \cdot A + [(\delta_{11}a_{12} + \delta_{12}a_{22})\omega^2] \cdot B = 0, \\ [(\delta_{12}a_{11} + \delta_{22}a_{12})\omega^2] \cdot A + [(\delta_{12}a_{12} + \delta_{22}a_{22})\omega^2 - 1] \cdot B = 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Для більш компактного запису подальших перетворень введемо позначення

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \delta_{11}a_{11} + \delta_{12}a_{12}, & \gamma_{12} &= \delta_{11}a_{12} + \delta_{12}a_{22}, \\ \gamma_{21} &= \delta_{12}a_{11} + \delta_{22}a_{12}, & \gamma_{22} &= \delta_{12}a_{12} + \delta_{22}a_{22}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Тоді рівняння (4.42) набудуть вигляду

$$\begin{cases} (\gamma_{11}\omega^2 - 1) \cdot A + (\gamma_{12}\omega^2) \cdot B = 0, \\ (\gamma_{21}\omega^2) \cdot A + (\gamma_{22}\omega^2 - 1) \cdot B = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Умовою існування відмінного від нуля розв'язку системи однорідних алгебраїчних рівнянь (4.44) відносно величин A і B буде рівність нулю визначника цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{11}\omega^2 - 1 & \gamma_{12}\omega^2 \\ \gamma_{21}\omega^2 & \gamma_{22}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.45)$$

Розкриваючи визначник (4.45), отримаємо:

$$(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})\omega^4 - (\gamma_{11} + \gamma_{22})\omega^2 + 1 = 0. \quad (4.46)$$

Рівняння (4.46) буде частотним рівнянням розглядуваної задачі.

Після визначення з рівняння (4.46) власних частот ω_1 і ω_2 , отримаємо з рівнянь (4.44) вирази коефіцієнтів форм коливань μ_1, μ_2 (аналогічно (4.11)):

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{1 - \gamma_{11}\omega_1^2}{\gamma_{12}\omega_1^2} = \frac{\gamma_{21}\omega_1^2}{1 - \gamma_{22}\omega_1^2}, \\ \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{1 - \gamma_{11}\omega_2^2}{\gamma_{12}\omega_2^2} = \frac{\gamma_{21}\omega_2^2}{1 - \gamma_{22}\omega_2^2}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Приклад 2.

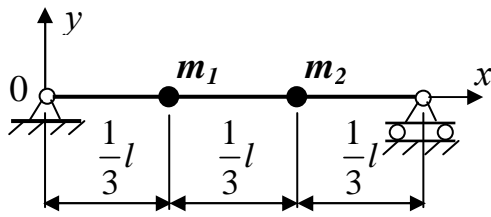


Рисунок 4.7

Визначити за допомогою коефіцієнтів податливості власні частоти і коефіцієнти форм малих коливань однорідного стержня довжиною l , що шарнірно обпертий по кінцях і несе два вантажі з рівними масами $m_1 = m_2 = m$ (рис. 4.7). Вантажі розташовані в точках з координатами $x_1 = 1/3 \cdot l$, $x_2 = 2/3 \cdot l$. Момент інерції поперечного перерізу стержня J , модуль пружності E . Масою стержня знехтувати.

Розв'язання

Виберемо у якості узагальнених координат системи вертикальні відхилення вантажів від їх положення рівноваги y_1 і y_2 . Враховуючи мализну переміщень, допустимо вести розрахунки по недеформованій схемі [15]: в положенні рівноваги вважати вісь стержня недеформованою, тобто в цьому положенні $y_1 = y_2 = 0$.

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії вантажів:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2. \quad (4.48)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.1), знаходимо узагальнені коефіцієнти інерції як множники при відповідних узагальнених швидкостях:

$$a_{11} = m_1 = m, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = m_2 = m. \quad (4.49)$$

Коефіцієнти податливості (одиничні переміщення) δ_{ij} для пружної стержневої системи, що працює переважно на згин, можна визначити за допомогою інтеграла Мора, що має у випадку сталої жорсткості на згин EJ вигляд [15]

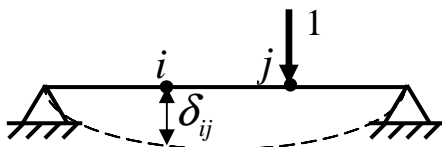


Рисунок 4.8

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_i M_j dx, \quad (4.50)$$

де M_i , M_j – згинальні моменти, що виникають при дії одиничних сил в точках стержня, де розміщені i -та і j -та маси відповідно (рис. 4.8).

Інтеграл, що входить у праву частину формули (4.50), можна визначити за способом Верещагіна: він дорівнює добутку площі епюри згинального моменту M_i на розташовану під її центром ваги ординату епюри M_j .

Визначимо реакції опор і побудуємо епюри згинальних моментів M_1 , M_2 (рис. 4.9, 4.10).

При визначенні коефіцієнтів податливості δ_{11} , δ_{22} епюри моментів зручно розбити на два трикутники ACB і BCD. Тоді

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{3} l \frac{2}{9} l \cdot \frac{4}{27} l + \frac{1}{2} \frac{2}{3} l \frac{2}{9} l \cdot \frac{4}{27} l \right) = \frac{4}{243} \cdot \frac{l^3}{EJ}. \quad (4.51)$$

При визначенні коефіцієнта податливості δ_{12} епюри моментів потрібно розбити на три ділянки AC, CE, ED (рис. 4.9) і AG, GC, CD (рис. 4.10), при цьому трапецію на другій ділянці (рис. 4.9) зручно розбити на прямокутник і трикутник. Тоді

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \frac{1}{EJ} & \left(\frac{1}{2} \frac{1}{3} l \frac{2}{9} l \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{9} l + \frac{1}{3} l \frac{1}{9} l \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{9} l + \frac{1}{2} \frac{1}{3} l \frac{1}{9} l \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{9} l + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{3} l \frac{1}{9} l \cdot \frac{2}{3} \frac{2}{9} l \right) = \frac{7}{486} \cdot \frac{l^3}{EJ}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

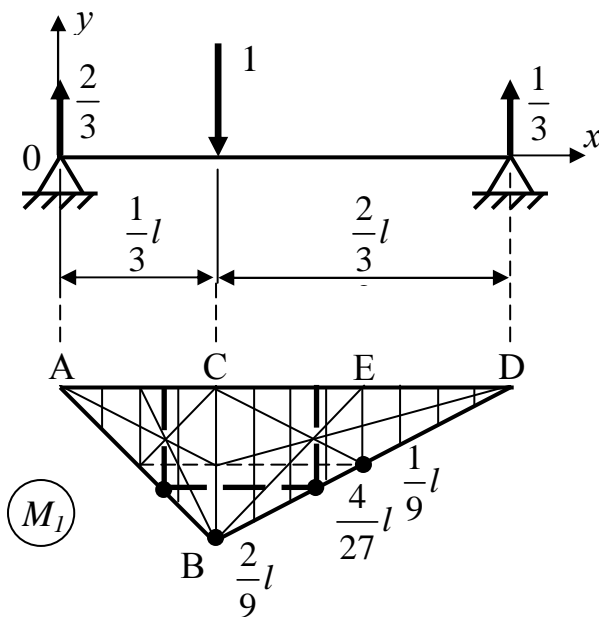


Рисунок 4.9

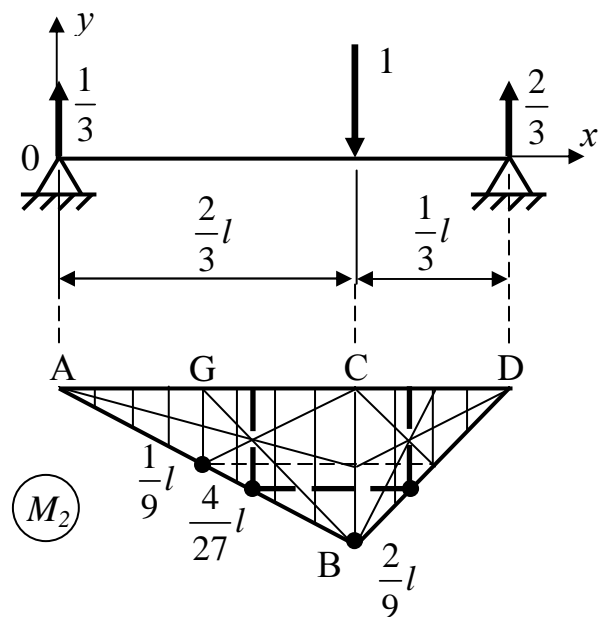


Рисунок 4.10

Підставляючи коефіцієнти (4.49), (4.51), (4.52) у формули (4.43), отримаємо

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \frac{4}{243} \cdot \frac{ml^3}{EJ}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{7}{486} \cdot \frac{ml^3}{EJ}. \quad (4.53)$$

Складемо, з урахуванням (4.53), частотне рівняння (4.46)

$$\left(\frac{ml^3}{EJ}\right)^2 \omega^4 \left(\frac{4}{243} \frac{4}{243} - \frac{7}{486} \frac{7}{486}\right) - \left(\frac{ml^3}{EJ}\right) \omega^2 \left(\frac{4}{243} + \frac{4}{243}\right) + 1 = 0. \quad (4.54)$$

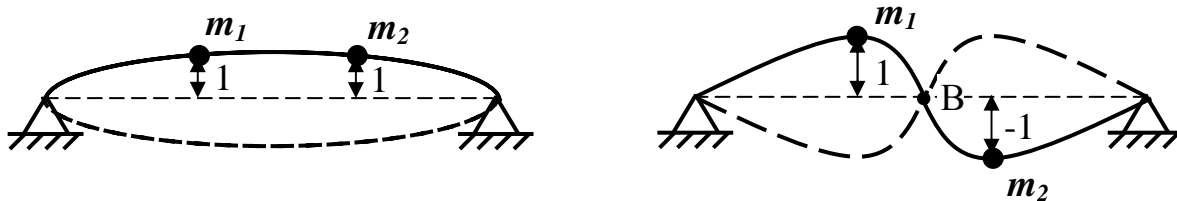
Коренями бікватратного рівняння (4.54) будуть власні частоти

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{162}{5} \cdot \frac{EJ}{ml^3}} = 5,69 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{486 \cdot \frac{EJ}{ml^3}} = 22,05 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}. \quad (4.55)$$

Обчислюючи значення коефіцієнтів форм коливань по формулам (4.47)

$$\mu_1 = \frac{1 - \frac{4}{243} \frac{162}{5}}{\frac{7}{486} \frac{162}{5}} = \frac{1 - \frac{8}{15}}{\frac{7}{15}} = 1, \quad \mu_2 = \frac{1 - \frac{4}{243} 486}{\frac{7}{486} 486} = \frac{1 - 8}{7} = -1, \quad (4.56)$$

можна побудувати форми власних коливань стержня (рис. 4.11, а, 4.11, б):



а – перша власна форма (безвузлова) б – друга власна форма (одновузлова)

Рисунок 4.11

Відповідь. Власні частоти системи $\omega_1 = 5,69 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$ (рад/с);

$\omega_2 = 22,05 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$ (рад/с). Коефіцієнти форм коливань $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = -1$. Як

видно з рисунків, перша форма коливань є *безвузловою* (рис. 4.11, а). При коливаннях за цією формою всі точки системи будуть рухатись з однаковою частотою ω_1 в одному напрямку, при цьому обидва вантажі – з однаковою амплітудою. Друга форма є *одновузловою*, тобто одна точка системи (точка В, рис. 4.11, б) буде при коливаннях за цією формою нерухомою. Точки системи, що знаходяться по різні боки від нерухомої точки В (в тому числі і

обидва вантажі), будуть рухатись з однаковою частотою ω_2 , але у протилежних напрямках. Амплітуди коливань першого і другого вантажу будуть і при другій формі однаковими.

Приклад 3.

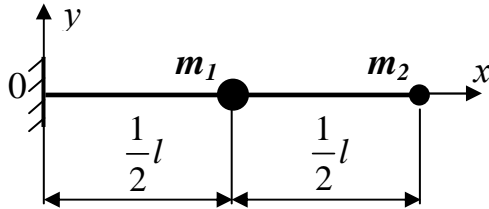


Рисунок 4.12

Визначити за допомогою коефіцієнтів податливості власні частоти і коефіцієнти форм малих коливань однорідного стержня довжиною l , що защемлений на лівому кінці і несе два вантажі з масами $m_1 = 3m$, $m_2 = m$ (рис. 4.12). Вантажі розташовані в

точках з координатами $x_1 = 1/2 \cdot l$, $x_2 = l$. Момент інерції поперечного перерізу стержня J , модуль пружності E . Масою стержня знехтувати.

Розв'язання

Виберемо у якості узагальнених координат системи вертикальні відхилення вантажів від їх положення рівноваги y_1 і y_2 , вважаючи, що в положенні рівноваги $y_1 = y_2 = 0$.

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії вантажів:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2. \quad (4.57)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.1), знаходимо узагальнені коефіцієнти інерції як множники при відповідних узагальнених швидкостях:

$$a_{11} = m_1 = 3m, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = m_2 = m. \quad (4.58)$$

Коефіцієнти податливості (одиничні переміщення) δ_{ij} визначаємо, як і в прикладі 2, за допомогою інтеграла Мора і способу Верещагіна. Побудуємо епюри згинальних моментів M_1 , M_2 від одиничних сил (рис. 4.13, 4.14) і складемо вирази для коефіцієнтів податливості δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} :

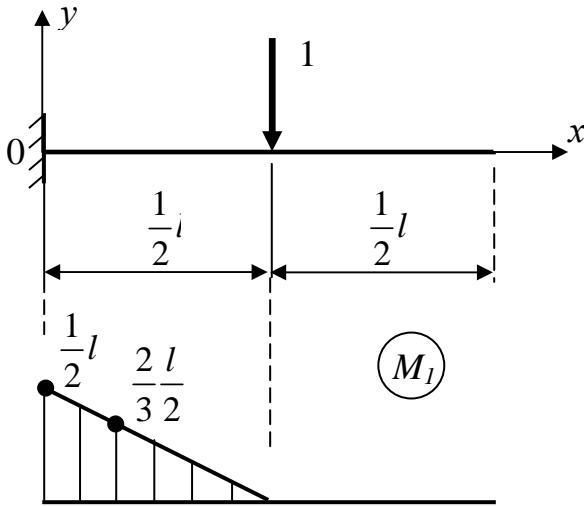


Рисунок 4.13

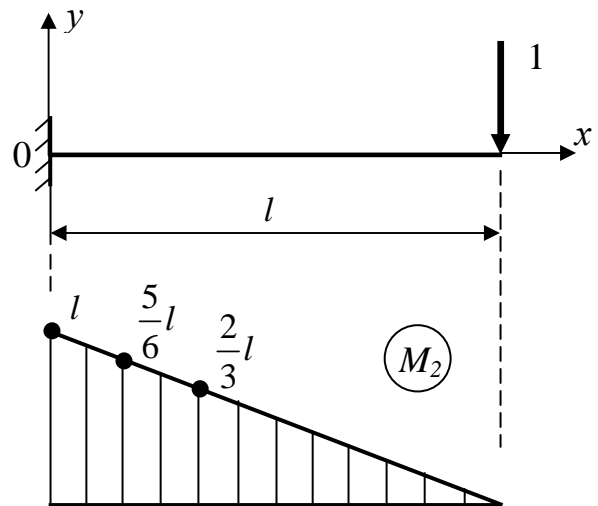


Рисунок 4.14

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} l \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{2} l \right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{l^3}{EJ}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ}, \\ \delta_{12} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} l \frac{1}{2} l \cdot \frac{5}{6} l \right) = \frac{5}{48} \cdot \frac{l^3}{EJ}.\end{aligned}\quad (4.59)$$

Підставляючи коефіцієнти (4.58), (4.59) у формули (4.43), отримаємо

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{1}{24} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot 3m = \frac{1}{8} \cdot \frac{ml^3}{EJ}, & \gamma_{22} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot m = \frac{1}{3} \cdot \frac{ml^3}{EJ}, \\ \gamma_{12} &= \frac{5}{48} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot m = \frac{5}{48} \cdot \frac{ml^3}{EJ}, & \gamma_{21} &= \frac{5}{48} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot 3m = \frac{5}{16} \cdot \frac{ml^3}{EJ}.\end{aligned}\quad (4.60)$$

Складемо, з урахуванням (4.60), частотне рівняння (4.46)

$$\left(\frac{ml^3}{EJ} \right)^2 \omega^4 \left(\frac{1}{8} \frac{1}{3} - \frac{5}{48} \frac{5}{16} \right) - \left(\frac{ml^3}{EJ} \right) \omega^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} \right) + 1 = 0. \quad (4.61)$$

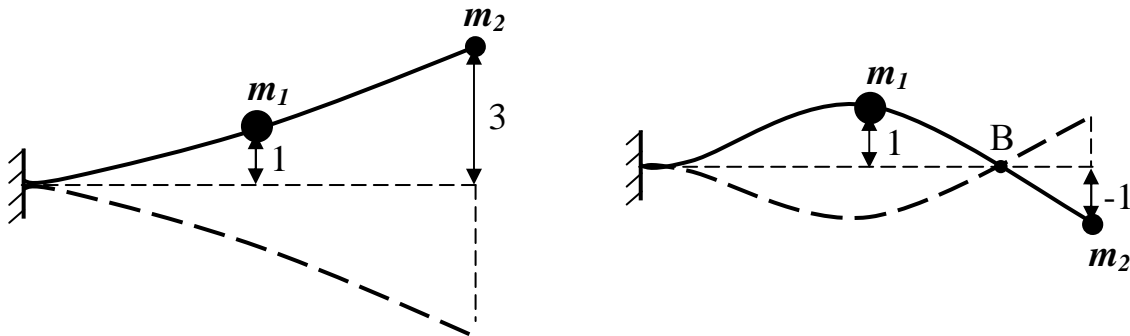
Коренями біквдратного рівняння (4.61) будуть власні частоти

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{16}{7} \cdot \frac{EJ}{ml^3}} = 1,51 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{48 \cdot \frac{EJ}{ml^3}} = 6,93 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}. \quad (4.62)$$

Обчислюючи значення коефіцієнтів форм коливань по формулам (4.47)

$$\mu_1 = \frac{1 - \frac{1}{8} \frac{16}{7}}{\frac{5}{48} \frac{7}{16}} = \frac{1 - \frac{2}{7}}{\frac{5}{21}} = 3, \quad \mu_2 = \frac{1 - \frac{1}{8} 48}{\frac{5}{48}} = \frac{1 - 6}{5} = -1, \quad (4.63)$$

побудуємо форми власних коливань стержня (рис. 4.15, а, 4.15, б):



а – перша власна форма (безвузлова) б – друга власна форма (одновузлова)

Рисунок 4.15

Відповідь. Власні частоти системи $\omega_1 = 1,51 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$ (рад/с);

$\omega_2 = 6,93 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$ (рад/с). Коефіцієнти форм коливань $\mu_1 = 3$; $\mu_2 = -1$. Як

видно з рисунків, перша форма коливань є *безвузловою* (рис. 4.15, а). При коливаннях за цією формою всі точки системи будуть рухатись з однаковою частотою ω_1 в одному напрямку, при цьому амплітуда коливань другого вантажу втричі більша за амплітуду коливань першого. Друга форма є *одновузловою*, тобто одна точка системи (точка В, рис. 4.15, б) буде при коливаннях за цією формою нерухомою. Точки системи, що знаходяться по різні боки від нерухомої точки В (в тому числі і обидва вантажі), будуть рухатись з однаковою частотою ω_2 , але у протилежних напрямках. Амплітуди коливань першого і другого вантажу будуть при другій формі однаковими.

4.4.2 Вимушені коливання

Розглянемо випадок, коли до консервативної системи прикладені збурюючі сили і відповідні їм узагальнені збурюючі сили Q_{1F} , Q_{2F} описуються

рівняннями (4.19). В цьому разі рівняння (4.33) набудуть вигляду

$$\begin{cases} c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = -(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) + Q_{1F}, \\ c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = -(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2) + Q_{2F}. \end{cases} \quad (4.64)$$

Розв'язуючи неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь (4.64) відносно узагальнених координат q_1, q_2 і використовуючи позначення (4.35), отримаємо

$$\begin{cases} q_1 = -\delta_{11}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) - \delta_{12}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2) + \delta_{11}Q_{1F} + \delta_{12}Q_{2F}, \\ q_2 = -\delta_{12}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) - \delta_{22}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2) + \delta_{21}Q_{1F} + \delta_{22}Q_{2F}. \end{cases} \quad (4.65)$$

Формули (4.65) являють собою диференціальні рівняння малих вимушених коливань системи з двома степенями вільності, в яких замість узагальнених коефіцієнтів жорсткості використовуються коефіцієнти податливості.

Частинний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь (4.65) розшукуємо у вигляді (4.21). Підставляючи (4.19), а також функції (4.21) і їх другі похідні за часом, у систему (4.65) і скорочуючи на множник $\sin \omega_B t$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно параметрів A_{1B}, A_{2B} :

$$\begin{cases} (\gamma_{11}\omega_B^2 - 1) \cdot A_{1B} + (\gamma_{12}\omega_B^2) \cdot A_{2B} = -\delta_{11}H_1 - \delta_{12}H_2, \\ (\gamma_{21}\omega_B^2) \cdot A_{1B} + (\gamma_{22}\omega_B^2 - 1) \cdot A_{2B} = -\delta_{12}H_1 - \delta_{22}H_2, \end{cases} \quad (4.66)$$

де коефіцієнти γ_{ij} визначаються за формулами (4.43).

Розв'язок неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь (4.66) має вигляд:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(\delta_{12}H_1 + \delta_{22}H_2)(\gamma_{12}\omega_B^2) - (\delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)(\gamma_{22}\omega_B^2 - 1)}{(\gamma_{11}\omega_B^2 - 1)(\gamma_{22}\omega_B^2 - 1) - (\gamma_{12}\omega_B^2)(\gamma_{21}\omega_B^2)}, \\ A_{2B} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(\delta_{11}H_1 + \delta_{12}H_2)(\gamma_{21}\omega_B^2) - (\delta_{12}H_1 + \delta_{22}H_2)(\gamma_{11}\omega_B^2 - 1)}{(\gamma_{11}\omega_B^2 - 1)(\gamma_{22}\omega_B^2 - 1) - (\gamma_{12}\omega_B^2)(\gamma_{21}\omega_B^2)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

За формулами (4.67) визначаються амплітуди вимушених коливань системи з двома степенями вільності, в яких замість узагальнених коефіцієнтів жорсткості використовуються коефіцієнти податливості.

В окремому випадку, коли друга збуджуючи узагальнена сила дорівнює нулю ($Q_{2F} = 0$, а значить $H_2 = 0$), формули (4.67) приймають вигляд

$$\begin{aligned} A_{1B} &= H_1 \frac{\delta_{12}(\gamma_{12}\omega_B^2) - \delta_{11}(\gamma_{22}\omega_B^2 - 1)}{(\gamma_{11}\omega_B^2 - 1)(\gamma_{22}\omega_B^2 - 1) - (\gamma_{12}\omega_B^2)(\gamma_{21}\omega_B^2)}, \\ A_{2B} &= H_1 \frac{\delta_{11}(\gamma_{21}\omega_B^2) - \delta_{12}(\gamma_{11}\omega_B^2 - 1)}{(\gamma_{11}\omega_B^2 - 1)(\gamma_{22}\omega_B^2 - 1) - (\gamma_{12}\omega_B^2)(\gamma_{21}\omega_B^2)}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Приклад 4.

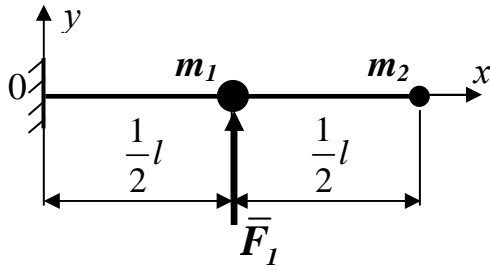


Рисунок 4.16

На перший вантаж системи, що була розглянута у прикладі 3 (рис. 4.12), діє збурююча сила $F_1 = H_1 \sin \omega_B t$ (рис. 4.16). Дослідити за допомогою коефіцієнтів податливості залежність амплітуд A_{1B} , A_{2B} вимушених коливань вантажів від частоти збурюючої сили ω_B .

Розв'язання

Використовуючи дані про розглядувану систему, що наведені у прикладі 3 п. 4.4.1, складемо для неї рівняння (4.68) для амплітуд вимушених коливань вантажів

$$A_{1B} = \frac{\frac{5}{48}(\frac{5}{48}\omega_B^2) - \frac{1}{24}(\frac{1}{3}\omega_B^2 - 1)}{(\frac{1}{8}\omega_B^2 - 1)(\frac{1}{3}\omega_B^2 - 1) - (\frac{5}{48}\omega_B^2)(\frac{5}{16}\omega_B^2)} \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ} =$$

$$= \frac{96 - 7\omega_B^2}{21\omega_B^4 - 1056\omega_B^2 + 2304} \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ}, \quad (4.69)$$

$$A_{2B} = \frac{\frac{1}{24}(\frac{5}{16}\omega_B^2) - \frac{5}{48}(\frac{1}{8}\omega_B^2 - 1)}{(\frac{1}{8}\omega_B^2 - 1)(\frac{1}{3}\omega_B^2 - 1) - (\frac{5}{48}\omega_B^2)(\frac{5}{16}\omega_B^2)} \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ} =$$

$$= \frac{80}{7\omega_B^4 - 352\omega_B^2 + 768} \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ}.$$

По формулам (4.69) побудуємо графіки залежності відносних амплітуд вимушених коливань $\tilde{A}_{1B} = A_{1B} \cdot \frac{EJ}{H_1 l^3}$, $\tilde{A}_{2B} = A_{2B} \cdot \frac{EJ}{H_1 l^3}$ від колової частоти вимушених коливань ω_B (рис. 4.17, 4.18).

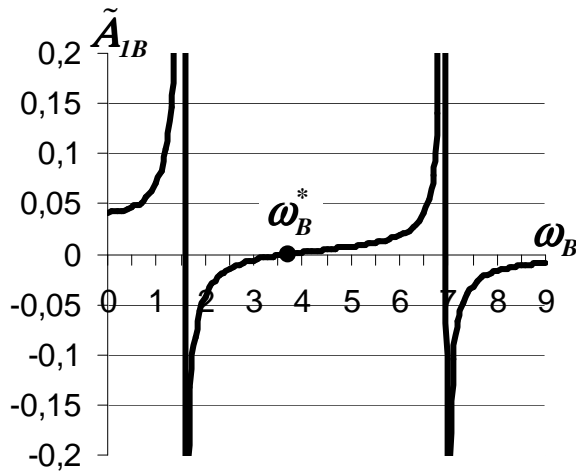


Рисунок 4.17

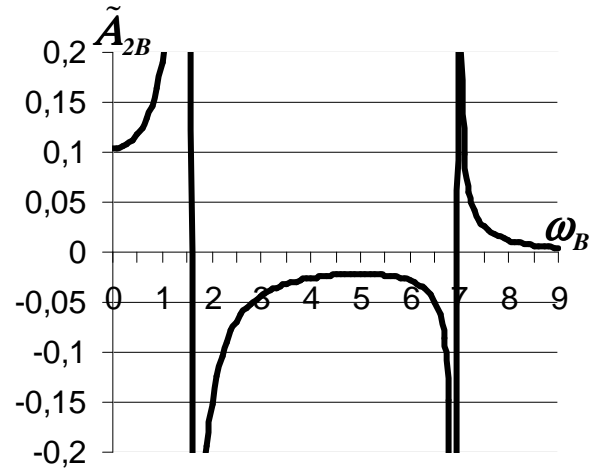


Рисунок 4.18

З аналізу графіків, а також першої з формул (4.69), витікає, що при значенні частоти збудовуючої сили $\omega_B^* = \sqrt{\frac{96}{7}} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \approx 3,70 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$ рад/с амплітуда вимушених коливань першого вантажу дорівнює нулю $A_{1B} = 0$. Це означає, що перший вантаж при дії на нього збудовуючої сили частоти ω_B^* залишається весь час нерухомим, а другий здійснює вимушені коливання з амплітудою

$$A_{2B}^* = \frac{80}{7 \frac{96^2}{7^2} - 352 \frac{96}{7} + 768} \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ} = -\frac{7}{240} \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ} \approx -0,03 \cdot H_1 \frac{l^3}{EJ},$$

де знак "–" свідчить про те, що другий вантаж рухається у протифазі із збудовуючою силою. Таким чином, при частоті ω_B^* другий вантаж виконує функції гасителя коливань першого вантажу.

Для з'ясування фізичного змісту колової частоти ω_B^* розглянемо аналогічну систему, у якій за допомогою опори унеможливлене переміщення точки А, де знаходиться перший вантаж (рис. 4.19).

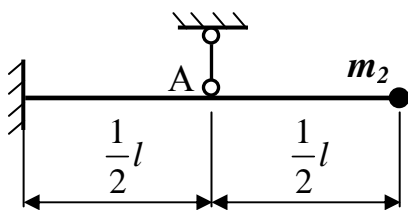


Рисунок 4.19

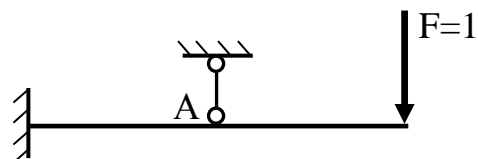


Рисунок 4.20

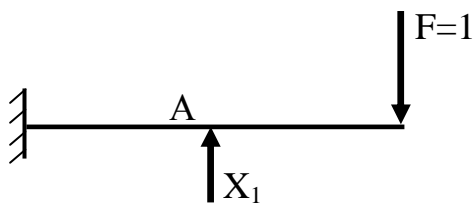


Рисунок 4.21

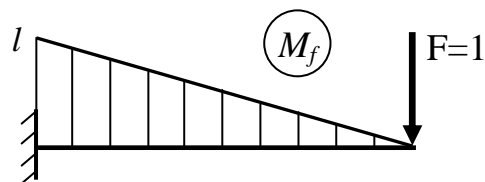


Рисунок 4.22

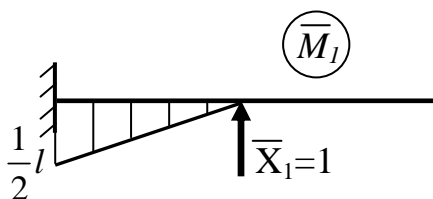


Рисунок 4.23

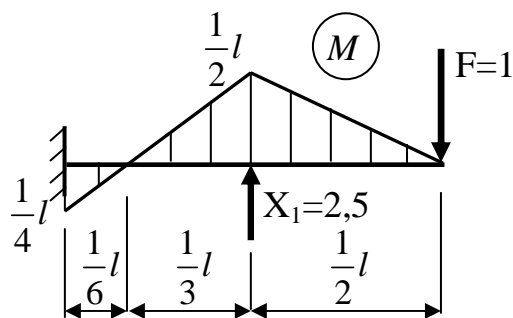


Рисунок 4.24

Для визначення коефіцієнта податливості розглянемо систему, де у точці знаходження другого вантажу прикладена одинична сила (рис. 4.20). Така система є один раз статично невизначеною, тому для її розрахунку використаємо метод сил [15]. Основна система, яку отримано із заданої шляхом усунення зайвої в'язі, наведена на рисунку 4.21. Канонічне рівняння для визначення невідомої реакції X_1 має вигляд

$$\delta'_{11} X_1 + \Delta'_{1f} = 0, \quad (4.70)$$

де одиничне δ'_{11} і грузове Δ'_{1f} переміщення в напрямку дії реакції X_1 знаходяться за допомогою епюр, наведених на рисунках 4.22, 4.23. Зважаючи на результати, отримані за формулами (4.59), канонічне рівняння (4.70) набуде вигляду

$$\frac{1}{24} \frac{l^3}{EJ} X_1 - \frac{5}{48} \frac{l^3}{EJ} = 0,$$

звідки

$$X_1 = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Далі для заданої системи, що наведена на рисунку 4.20, побудуємо епюру згинального моменту (рис. 4.24) і визначимо коефіцієнт податливості (одиничне переміщення), користуючись правилом Верещагіна:

$$\delta^*_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} l \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \frac{1}{2} l \frac{2}{3} \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \frac{1}{6} l \frac{1}{4} l \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{4} l \right) = \frac{7}{96} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Тоді власна частота парціальної системи, що наведена на рисунку 4.19, дорівнюватиме

$$\omega_2^{napu} = \frac{1}{m_2 \delta_{22}^*} = \sqrt{\frac{96}{7}} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 3,70 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = \omega_B^*.$$

З цієї формули витікає, що частота ω_B^* є парціальною коловою частотою системи з другим вантажем і опорою на місці першого вантажу.

Таким чином, і в балочних системах додатковий вантаж при певних параметрах може виконувати функцію динамічного гасителя коливань.

4.5 Коливання систем зі скінченним числом степенів вільності

Для механічних систем з числом степенів вільності більше двох принцип складання диференціальних рівнянь руху і їх інтегрування залишається таким же, як і для системи з двома степенями вільності, тільки збільшується число рівнянь і шуканих функцій. Наприклад, диференціальні рівняння (4.4) приймають вигляд

[illegible]

Рівняння (4.71) називаються *диференціальними рівняннями малих вільних коливань консервативної системи з S степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги*.

У випадку, коли число ступенів вільності $s > 4$, рівняння частот розв'язують, а коефіцієнти форм визначають наближеними методами, наприклад, методами послідовних наближень, Папковича, Релея, Донкерлі, Рітца та ін. [1, 8, 9, 11, 13]. При цьому число власних частот і форм коливань дорівнює числу степенів вільності s . Також наближеними методами визначають амплітуди вимушених коливань.

4.6 Методи захисту від вібрацій

Вібраціями звичайно називають малі коливання механічних систем, вузлів і агрегатів машин, будівельних конструкцій і їх елементів з частотами, більшими за 5 рад/с. Методи захисту від вібрацій в будівництві і на виробництві можна поділити на чотири групи.

1. *Демпфірування коливань*. Механічні системи з демпфіруванням створюють умови швидкого затухання коливань за рахунок розсіювання енергії. Використовують як гідравлічні (в'язкі) демпфери, так і механічні енергопоглиначі. Серед механічних виділяють поглиначі сухого тертя, гістерезисні (з використанням матеріалів зі значним внутрішнім тертям), ударної дії, а також поглиначі з елементами підвищеної пластичної деформації. Використовують і комбіновані поглиначі. Наприклад, для гасіння сейсмічних коливань деяких висотних споруд Сан-Франциско і Лос-Анджелеса у вертикальній панелі частини поверхів вмонтовані стержневі діафрагми і гідравлічні демпфери.

2. *Віброізоляція* – спосіб зменшення вимушених коливань механічної системи, що базується на послабленні її зв'язку з іншими системами. Виділяють *силову* (активну) і *кінематичну* (пасивну) віброізоляції. У першому випадку ізолюється основа споруди (фундамент, елемент перекриття тощо) від джерела вібрацій (наприклад, незрівноважений двигун агрегата). При цьому намагаються, щоб сила, яка передається на основу від джерела вібрацій, була якомога меншою. У другому випадку ізолюється об'єкт (машина, устаткування, апаратура, робоче місце оператора тощо) від вібрації основи, що може виникнути під час транспортування, від коливань машин, які працюють поруч, а також від сейсмічних коливань, що передаються через ґрунт. У цьому разі завдання полягає в зменшенні амплітуди коливань об'єкта.

Конструктивно віброізолятори можуть бути пружинними (із сталевих звитих пружин), гумовими (які одночасно володіють пружними і в'язкими властивостями), ресорного типу (металеві пружні пластини), комбінованими (пружинно-гумовими). Часто віброізолятори використовують з демпферами в'язкого тертя. Прикладом використання віброізоляторів у сучасному будівництві було встановлення на початку ХХІ ст. фундаментів ряду висотних споруд Сан-Франциско на гумово-металеві опори для зменшення впливу сейсмічних коливань ґрунту.

3. *Динамічне гасіння коливань* – спосіб зменшення або повного гасіння вимушених коливань механічної системи, заснований на приєднанні до цієї системи додаткової маси. Цей спосіб є ефективним при збуренні сталої чи мало змінної частоти або в поєднанні з демпферами. На практиці використовують

пружні гасителі (вантаж на пружині, сталевий пружний лист), маятникові, ударні, рідинні. Наприклад, на верхніх поверхах (87-91) збудованого на початку ХХІ ст. найвищого у світі на той час будинку «Тайбей-101» (Тайвань, 2003 р., висота 509 м) встановлений маятниковий гаситель коливань вагою 700 тонн. Ще два пружних гасителі вагою по 6 тонн встановлені у верхній баштовій частині (пінаклі) будинку. У хмарочосі Цзінь Мао (Шанхай, 1998 р., висота 421м) на 57-му поверсі збудовано басейн, що виконує також функцію рідинного гасителя коливань. Для уникнення значних коливань, що виникали під дією експлуатаційних і вітрових навантажень, на пішохідному мості «Міленіум» у Лондоні (2002 р.) і на автомобільному мості балочного типу у Волгограді (2012 р.) встановлені пружні гасителі коливань.

4. *Гасіння коливань за рахунок послаблення взаємного впливу джерел вібрації.* При роботі декількох потужних механізмів у виробничих спорудах (швейний, ковальський цехи, компресорні станції тощо) на каркаси цих споруд, а також через фундаменти на ґрунт можуть передаватись значні коливання, якщо вібрації певного механізму посилюються вібраціями інших механізмів. Мали місце випадки, коли вібрації квартир житлового будинку, що знаходився майже в кілометрі від компресорної станції, перевищували допустимий санітарний рівень в декілька разів, а вібрація будинку АТС, що знаходилась неподалік від ковальського цеху, призводила до скидання контактів реле і нестабільності телефонного зв'язку. Відмічений випадок появи тріщин у стінах будівлі в результаті значних вібрацій, що виникли при пуску нового швейного цеху.

Послабити взаємний вплив вібрацій можна або за допомогою раціонального розміщення механізмів, або за допомогою пристроїв, які регулюють початкові фази роботи елементів механізмів так, що відбувається взаємне гасіння коливань.

Питання для самоконтролю

1. Який вигляд мають кінетична і потенціальна енергії механічної системи з двома степенями вільності?
2. Як визначаються власні і парціальні частоти консервативної системи з двома степенями вільності?
3. Що називається коефіцієнтами форм коливань? Що вони показують? Що таке форма коливань, вузол форми коливань?
4. Від чого залежать власні частоти і коефіцієнти форм коливань?
5. Від чого залежать амплітуди і зсуви фаз вільних коливань?

6. Наведіть властивості власних коливань консервативної системи з двома степенями вільності.
7. Від чого залежать амплітуди вимушених коливань?
8. При яких умовах настає резонанс?
9. Наведіть властивості вимушених коливань системи з двома степенями вільності.
10. При яких умовах виникає динамічне гасіння коливань?
11. У чому полягає фізична сутність гасіння?
12. В яких механічних системах доцільно використовувати динамічне гасіння коливань?
13. Який фізичний зміст мають коефіцієнти податливості?
14. Який зв'язок існує між коефіцієнтами податливості і узагальненими коефіцієнтами жорсткості?
15. Як визначають коефіцієнти податливості у балочних системах?
16. Наведіть методи захисту від вібрацій.

ІІІ МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У цій частині розглядаються пружні тіла, масові й деформаційні характеристики яких розподілені безперервно. До подібних тіл відносяться такі елементи конструкцій, як стержні, вали, канати, балки, прості рами, кільця, арки, пластини, оболонки тощо.

Найпростішими системами з розподіленими параметрами є прямі **стержні** – пружні тіла, два розміри яких (ширина і висота) малі у порівнянні з третім (довжиною).

Пружне тіло можна розглядати як механічну систему, що складається з нескінченної кількості точок, між якими діють сили пружності. Для визначення положення такої системи необхідне нескінченне число координат, тобто вона має нескінченне число степенів вільності і, як наслідок, нескінченне число власних частот і форм коливань.

Основні припущення:

- 1) матеріал тіла пружний, однорідний і ізотропний;
- 2) коливання малі, тобто переміщення точок тіла малі в порівнянні з його геометричними розмірами. При цьому для тіла виконується закон Гука (напруження пропорційні деформаціям, тобто є лінійними функціями деформацій);
- 3) у недеформованому стані вісь стержня прямолінійна;
- 4) справедлива гіпотеза плоских перерізів: прямий елемент стержня, перпендикулярний до його осі до деформації, залишається прямим і перпендикулярним до осі стержня після деформації і його довжина не змінюється.

В залежності від виду деформацій виділяють поздовжні, крутні і поперечні (згинні) коливання стержнів. Крутні коливання описуються такими самими рівняннями, що і поздовжні, тільки у якості переміщення береться кут повороту перерізу відносно поздовжньої осі і використовуються відповідні масові і пружні характеристики. Тому в подальшому будуть розглянуті тільки поздовжні і поперечні коливання стержнів.

5 Поздовжні коливання прямих стержнів (балок)

Розглянемо прямолінійний однорідний стержень постійного поперечного перерізу, який здійснює поздовжні коливання.

5.1 Диференціальне рівняння руху елемента стержня

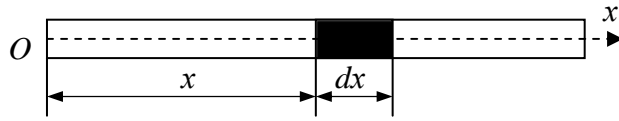


Рисунок 5.1

Розглянемо елемент стержня нескінченно малої довжини dx , положення якого на осі стержня визначається координатою x (рис. 5.1).

Позначимо u – позовжнє переміщення перерізу стержня при коливаннях, яке залежить від розташування перерізу (координати x) і часу t :

$$u = u(x, t).$$

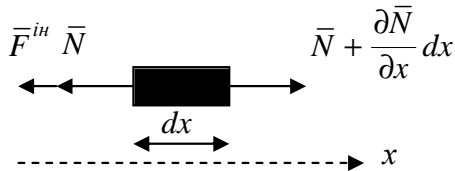


Рисунок 5.2

Розглянемо сили, що прикладені до елемента стержня при коливаннях, і застосуємо принцип Даламбера в проекції на вісь x (рис. 5.2):

$$-N + (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) - F^{in} = 0, \quad (5.1)$$

де N , $\frac{\partial N}{\partial x} dx$ – позовжня сила в перерізі з координатою x та її приріст

на відрітку dx відповідно, F^{in} – сила інерції.

Як відомо, модуль сили інерції дорівнює добутку маси елемента стержня $\rho F dx$ (де ρ – густина матеріалу стержня; F – площа його поперечного перерізу) на його прискорення $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тоді після скорочення на N і підстановки модуля сили інерції рівняння (5.1) набуде вигляду

$$\frac{\partial N}{\partial x} dx - \rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Відкинемо далі в отриманому рівнянні спільний множник dx і перенесемо другий доданок в праву частину рівняння:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.2)$$

Згідно із законом Гука поздовжня сила [15]

$$N = EF \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.3)$$

де E – модуль пружності першого роду.

У подальшому будемо розглядати стержні сталого перерізу ($F = \text{const}$). Після підстановки (5.3) в (5.2) і скорочення на спільний множник F , отримаємо:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Позначивши

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (5.4)$$

одержимо *диференціальне рівняння вільних поздовжніх коливань прямого стержня сталого перерізу*:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5.5)$$

5.2 Розв'язання диференціального рівняння вільних коливань стержня

Відповідно до методу Фур'є, шукаємо розв'язок диференціального рівняння (5.5) у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (5.6)$$

Підставляючи (5.6) у (5.5), одержимо

$$a^2 T(t) \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - X(x) \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0.$$

Позначаючи похідні

$$X'' = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}, \quad \ddot{T} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

і розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \quad (5.7)$$

Оскільки ліва частина (5.7) залежить тільки від часу t , а права – від координати x , рівність можлива лише в тому випадку, коли ліва і права

частини (5.7) дорівнюють константі. Позначивши цю константу ω^2 (можна довести [1], що ця константа від'ємна), (5.7) можна записати у вигляді

$$\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2,$$

що еквівалентно двом звичайним диференціальним рівнянням

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (5.8)$$

$$X'' + k^2 X = 0, \quad (5.9)$$

$$\text{де} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (5.10)$$

Розв'язки диференціальних рівнянь (5.8), (5.9), як відомо [3], мають вигляд

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (5.11)$$

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (5.12)$$

У рівняннях (5.11) і (5.12) коефіцієнти A , B , C_1 , C_2 – сталі інтегрування.

Як видно з рівняння (5.11), параметр ω є **власною частотою** поздовжніх коливань стержня, а функція $X(x)$ (рівняння (5.12)), що залежить від координати x і визначає розподіл амплітуд переміщень точок осі стержня, **власною формою** поздовжніх коливань стержня.

Власну форму $X(x)$ визначають так, щоб задовольнити умовам закріплення на кінцях стержня. Ці умови називаються **граничними**. Для кожного кінця стержня (при $x = 0$ і $x = l$, де l – довжина стержня) складають по одній умові, всього їх буде дві. Після підстановки функції (5.12) і її похідних у граничні умови вийде однорідна система двох алгебраїчних рівнянь щодо сталих C_1, C_2 . Умовою існування ненульового розв'язку для C_1, C_2 буде рівність нулю визначника цієї системи, що залежатиме тільки від параметра ω :

$$\Delta(\omega) = 0. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) називається **частотним**. Коренями цього рівняння і будуть власні частоти ω_n , причому їх число нескінченне: $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Далі, із системи рівнянь відносно C_1, C_2 одну із сталих інтегрування можна виразити через іншу (наприклад, C_2 через C_1) і записати вираз для власної форми $X_n(x)$, що відповідає власній частоті ω_n .

Загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) виходить як лінійна комбінація розв'язків вигляду (5.6) усієї множини n частот ω_n :

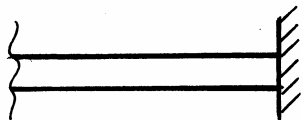
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (5.14)$$

де сталі A_n, B_n визначаються з початкових умов $u(x, 0)$ і $\dot{u}(x, 0)$. Рівняння (5.14) є *рівнянням вільних позовжніх коливань стержня*.

5.3 Граничні умови

Розглянемо кілька можливих випадків закріплення одного з кінців стержня (який має координату $x = 0$ або $x = l$).

1. Защемлений кінець



На защемленому кінці дорівнює нулю переміщення u :

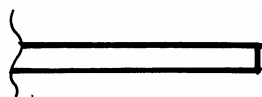
$$u = 0. \quad (5.15)$$

Оскільки $u = T(t) \cdot X(x)$, а функція $T(t)$ у загальному випадку не дорівнює 0 для будь-якого значення координати x , то рівняння (5.15) можна записати у вигляді

$$X = 0. \quad (5.16)$$

Рівняння (5.16) виражає *граничну умову на защемленому кінці стержня*.

2. Вільний кінець



На вільному кінці дорівнює нулю позовжня сила N :

$$N = 0. \quad (5.17)$$

Оскільки $N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF \cdot T(t) \cdot X^I(x)$, рівняння (5.17) набуде вигляду

$$X^I = 0. \quad (5.18)$$

Рівняння (5.18) виражає *граничну умову на вільному кінці стержня*.

5.4 Приклади розрахунку поздовжніх коливань пружного стержня

Приклад 1.

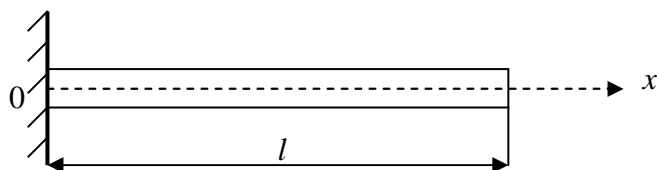


Рисунок 5.3

Визначити перші три власні частоти і побудувати власні форми поздовжніх коливань сталевого консольного стержня довжиною l (рис. 5.3).

Значення параметрів: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³; $l = 8$ м.

Розв'язання

Запишемо граничні умови для даного прикладу, використовуючи формули (5.16), (5.18) для поздовжнього переміщення при $x = 0$ і $x = l$:

$$X(0) = 0; \quad X'(l) = 0. \quad (5.19)$$

Щоб скористатися граничними умовами, знайдемо першу похідну функції (5.12) за координатою x :

$$(\cos kx)' = -k \cdot \sin kx; \quad (\sin kx)' = k \cdot \cos kx;$$

$$X'(x) = k(-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx). \quad (5.20)$$

Підставляючи (5.12) і (5.20) в рівняння граничних умов (5.19), одержимо:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 &= 0; \\ k(-C_1 \sin kl + C_2 \cos kl) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Система однорідних рівнянь (5.21) має відмінний від нуля розв'язок тільки у випадку рівності нулю визначника цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0. \quad (5.22)$$

Розкриваючи визначник, одержимо

$$\cos kl = 0. \quad (5.23)$$

Рівняння (5.23) буде частотним рівнянням даної задачі.

Корені рівняння (5.23):

$$k_n l = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (n = 1, \dots, \infty).$$

Тоді

$$k_n = \frac{\pi \cdot (2n-1)}{2l}. \quad (5.24)$$

З огляду на формули (5.4), (5.10) одержимо вираз для *власних частот*:

$$\omega_n = k_n \cdot a = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2n-1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n=1, \dots, \infty). \quad (5.25)$$

Тоді перші три власні частоти будуть:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2 \cdot 1 - 1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \frac{3,14}{8} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \frac{3,14}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^4 \approx 981 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2 \cdot 2 - 1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \frac{3,14}{8} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \frac{3,14}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^4 \approx 2943 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

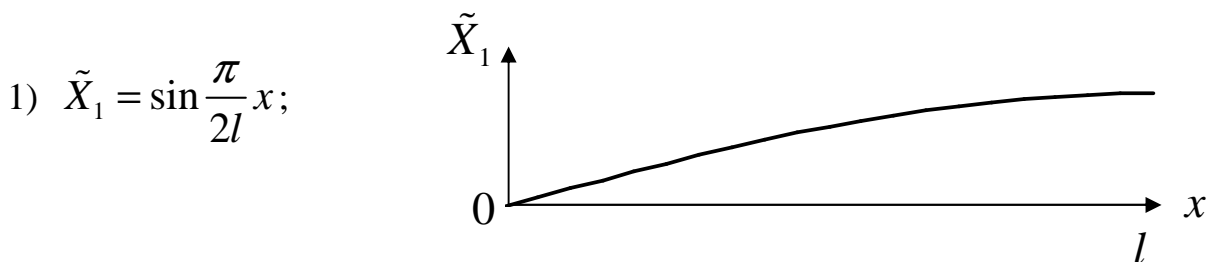
$$\omega_3 = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2 \cdot 3 - 1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \frac{3,14}{8} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \frac{3,14}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot 10^4 \approx 4905 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

Тепер визначимо власні форми. З огляду на рівність нулю сталої C_1 з першого з рівнянь (5.21) вираз (5.12) для *власних форм* у даному прикладі набуде вигляду

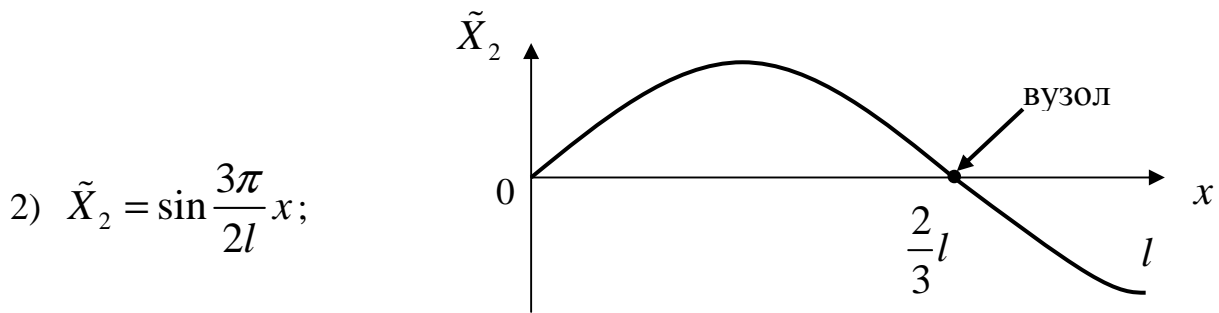
$$X_n(x) = C_{2n} \sin k_n x = C_{2n} \sin \left[\frac{\pi \cdot (2n-1)}{2l} \cdot x \right] \quad (n=1, \dots, \infty). \quad (5.26)$$

Задаючи в рівнянні (5.26) координату x , можна обчислити (з точністю до сталої C_{2n}) значення власної форми $\tilde{X}_n(x) = X_n(x) / C_{2n}$ і побудувати графік $\tilde{X}_n(x)$.

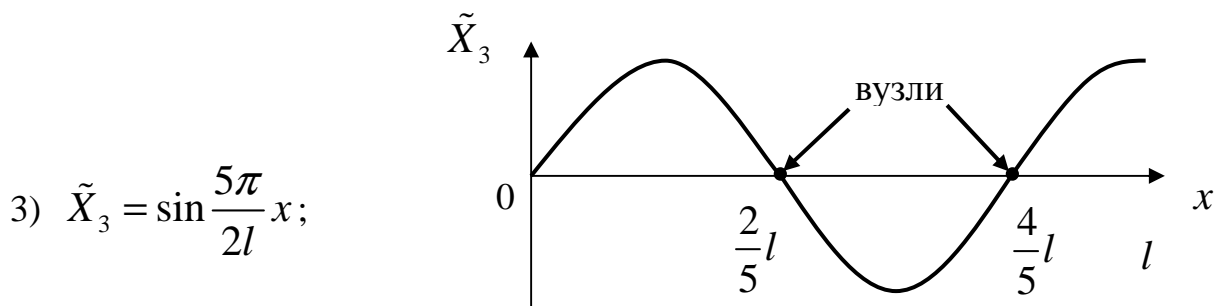
Вирази і графіки (графіки будують для функцій $\tilde{X}_n(x)$) для перших трьох власних форм матимуть вигляд (рис. 5.4):



а – перша власна форма (безвузлова)



б – друга власна форма (одновузлова)



в – третя власна форма (двовузлова)

Рисунок 5.4 – Форми власних поздовжніх коливань стержня

Відповідь. Власні частоти поздовжніх коливань стержня:

$$\omega_1 = 981 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega_2 = 2943 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega_3 = 4905 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

З наведених розрахунків випливає, що нижчій власній частоті ω_1 відповідає безвузлова форма коливань стержня, при якій всі точки стержня одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають максимального відхилення від нього. Зі збільшенням номера власної частоти зростає число **вузлових точок**, які при поздовжніх коливаннях стержня залишаються нерухомими. Лінійні координати вузлів надані на рисунку 5.4,б, в.

Приклад 2.

Визначити рівняння поздовжніх коливань стержня сталого перерізу F , що розглянутий у прикладі 1 (рис. 5.3), при наступних граничних і початкових умовах:

$u(0, t) = 0$ (лівий кінець стержня защемлений);

$u'(l, t) = 0$ (правий кінець стержня вільний);

$u(x, 0) = \frac{Px}{EF} = \varepsilon_0 x$ (стержень був розтягнутий прикладеною на правому кінці поздовжньою силою $P = EF\varepsilon_0$, яка в деякий момент раптово відбирається, де $\varepsilon_0 = \frac{P}{EF}$ - початкова деформація стержня на правому кінці);
 $\dot{u}(x, 0) = 0$ (стержень відпускають без початкової швидкості).

Розв'язання

Розв'язок рівняння (5.5) отримаємо методом двовірного перетворення Лапласа теорії операційного числення, що розглянуто в роботах [5, 16].

В області перетворень будемо мати

$$U(s, p) = -c_1^2 \varepsilon_0 p \frac{1}{s^2(s^2 - c_2^2)} + \left(\frac{c_1^2 \varepsilon_0 p}{c_2^2} - \frac{c_1^2 \varepsilon_0 p}{c_2^2} \cdot \frac{1}{ch(c_2 l)} \right) \cdot \frac{1}{(s^2 - c_2^2)},$$

де s, p – оператори перетворення Лапласа, $c_1^2 = 1/a^2$, $c_2^2 = c_1^2 p^2$.

В області оригіналів буде

$$u(x, t) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right) \right].$$

Останнє рівняння є *рівнянням поздовжніх коливань стержня* при заданих граничних і початкових умовах.

Перевірка. При $t = 0$, $x = l$, враховуючи, що $\sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi\right) = (-1)^{n-1}$, а

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, отримаємо

$$u(l, 0) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \right] = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} \right] = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \varepsilon_0 l.$$

Останній вираз відповідає заданим початковим умовам на правому кінці стержня.

Зауваження. Крутні коливання описуються тими самими рівняннями, що і поздовжні, тільки функція $u(x, t)$ буде описувати кут повороту перерізу в точці з координатою x , у якості поздовжніх сил виступають крутні моменти, а замість модулю пружності першого роду E і площі F використовують відповідно модуль зсуву G і полярний момент інерції перерізу I_p .

Питання для самоконтролю

1. Які основні припущення приймаються в теорії малих коливань стержнів?
2. Який закон механіки використовується для отримання диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
3. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
4. Що таке граничні умови, для чого вони використовуються?
5. Яке рівняння виражає граничні умови для вільного кінця при поздовжніх коливаннях стержня?
6. Які умови використовуються для визначення сталих інтегрування?
7. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
8. Яке рівняння називається частотним?
9. Що таке вузли форми коливань?
10. Якою закономірністю пов'язані кількість вузлів і номер форми коливань?
11. Чим відрізняються рівняння поздовжніх і крутних коливань стержнів?

6 Поперечні коливання прямих стержнів (балок)

Розглянемо прямолінійний однорідний стержень сталого поперечного перерізу. Окрім основних припущень, сформульованих на початку частини III, будемо також вважати, що при малих коливаннях поперечні переміщення точок стержня відбуваються перпендикулярно до його осі.

6.1 Диференціальне рівняння руху елемента стержня

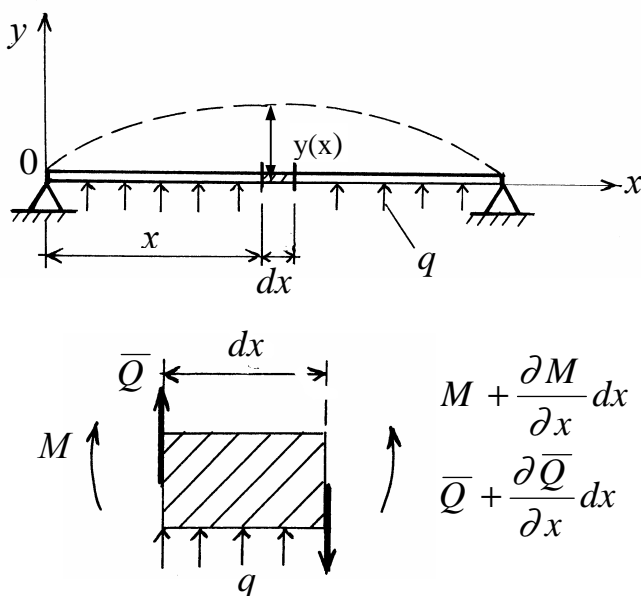


Рисунок 6.1

Розглянемо елемент стержня нескінченно малої довжини dx , положення якого на осі стержня визначається координатою x (рис. 6.1), де $y(x)$ – прогин стержня (переміщення точки осі стержня з координатою x у напрямку осі y); q – розподілене навантаження; \bar{Q} – поперечна сила; M – згинальний момент; $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} dx$, $\frac{\partial M}{\partial x} dx$ – прирости поперечної сили і згинального моменту відповідно.

Як відомо з курсу опору матеріалів, диференціальне рівняння кривої вигину осі стержня має вигляд [15]

$$EJ \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M, \quad (6.1)$$

де E – модуль пружності; J – момент інерції поперечного перерізу стержня щодо нейтральної осі (z).

Застосовуючи співвідношення між згинальним моментом і інтенсивністю розподіленого навантаження

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q$$

і підставляючи в нього вираз (6.1), одержимо

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q,$$

або для однорідного стержня сталого поперечного перерізу ($EJ = \text{const}$)

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q. \quad (6.2)$$

При поперечних коливаннях стержня прогин буде функцією двох змінних (координати x і часу t):

$$y = y(x, t).$$

Застосуємо для елемента стержня довжиною dx принцип Даламбера, взявши в якості розподіленого навантаження розподілені сили інерції:

$$q = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (6.3)$$

де ρ – густина матеріалу стержня; F – площа його поперечного перерізу.

Підставляючи (6.3) у (6.2), одержимо

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

або

$$\frac{EJ}{\rho F} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Позначаючи

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho F}, \quad (6.4)$$

одержимо *диференціальне рівняння вільних поперечних коливань стержня*:

$$a^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (6.5)$$

6.2 Розв'язання диференціального рівняння вільних коливань стержня

Відповідно до методу Фур'є, шукаємо розв'язок диференціального рівняння (6.5) у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot T(t). \quad (6.6)$$

Підставляючи (6.6) у (6.5), одержимо

$$a^2 T(t) \cdot \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} + Y(x) \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0.$$

Позначаючи похідні

$$Y^{IV} = \frac{d^4 Y(x)}{dx^4}, \quad \ddot{T} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

і розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -a^2 \frac{Y^{IV}}{Y}. \quad (6.7)$$

Оскільки ліва частина (6.7) залежить тільки від часу t , а права – від координати x , рівність можлива тільки в тому випадку, коли ліва і права частини (6.7) дорівнюють константі. Позначивши цю константу – ω^2 , рівняння (6.7) можна записати у вигляді

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -a^2 \frac{Y^{IV}}{Y} = -\omega^2,$$

що еквівалентно двом звичайним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (6.8)$$

$$Y^{IV} - k^4 Y = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{де } k^4 = \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (6.10)$$

Розв'язок диференціального рівняння (6.8), як відомо, має вигляд

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (6.11)$$

Рівнянню (6.9) задовольняють функції $\cos kx$, $\sin kx$, $ch\ kx$, $sh\ kx$, де $ch\ kx = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$ – гіперболічний косинус; $sh\ kx = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$ – гіперболічний синус, що мають властивість: $ch^2 kx - sh^2 kx = 1$.

Загальний розв'язок рівняння (6.9) буде лінійною комбінацією цих функцій, яку зручніше записати у вигляді:

$$Y(x) = C_1 (\cos kx + ch\ kx) + C_2 (\cos kx - ch\ kx) + C_3 (\sin kx + sh\ kx) + C_4 (\sin kx - sh\ kx). \quad (6.12)$$

У рівняннях (6.11) і (6.12) коефіцієнти A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 – сталі інтегрування.

Як видно з рівняння (6.11), параметр ω є **власною частотою** поперечних коливань стержня, а функція $Y(x)$ (рівняння (6.12)), що залежить від координати x і визначає розподіл амплітуд переміщень точок осі стержня, – **власною формою** поперечних коливань стержня.

Власну форму $Y(x)$ визначають так, щоб задовольнити умовам закріплення на кінцях стержня. Ці умови називаються **граничними**. Для кожного кінця стержня (при $x = 0$ і $x = l$, де l – довжина стержня) складають по дві умови, усього їх буде чотири. Після підстановки функції (6.12) і її похідних у граничні умови вийде однорідна система чотирьох алгебраїчних рівнянь щодо сталих C_1, C_2, C_3, C_4 . Умовою існування ненульового розв'язка для C_1, C_2, C_3, C_4 буде рівність нулю визначника цієї системи, що буде залежати тільки від параметра ω :

$$\Delta(\omega) = 0. \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) називається **частотним**. Коренями цього рівняння і будуть власні частоти ω_n , причому їхнє число нескінченне: $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (6.5) виходить як лінійна комбінація розв'язків вигляду (6.6) усієї множини n частот ω_n :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (6.14)$$

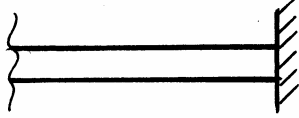
де сталі A_n, B_n визначаються з початкових умов $y(x, 0)$ і $\dot{y}(x, 0)$.

Рівняння (6.14) є **рівнянням вільних поперечних коливань стержня**.

6.3 Граничні умови

Розглянемо кілька можливих випадків закріплення одного з кінців стержня (який має координату $x = 0$ або $x = l$).

1. Защемлений кінець



На защемленому кінці дорівнюють нулю прогин y і кут повороту осі стержня θ :

$$\begin{cases} y = 0, \\ \theta = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

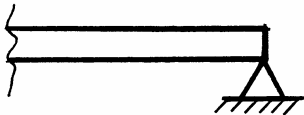
Враховуючи, що $y = T(t) \cdot Y(x)$, $\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = T(t) \cdot Y'(x)$, а функція $T(t)$

у загальному випадку не дорівнює 0 для будь-якого значення координати x , рівняння (6.15) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} Y = 0, \\ Y' = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Рівняння (6.16) виражають *граничні умови на защемленому кінці стержня*.

2. Шарнірно (вільно) обпертий кінець.



У цьому випадку на кінці стержня дорівнюють нулю прогин y і згинальний момент M :

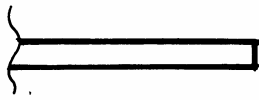
$$\begin{cases} y = 0, \\ M = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Оскільки $M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = EJ \cdot T(t) \cdot Y''(x)$, рівняння (6.17) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} Y = 0, \\ Y'' = 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Рівняння (6.18) виражають *граничні умови на шарнірно обпертому кінці стержня*.

3. Вільний кінець



На вільному кінці дорівнюють нулю згинальний момент M и поперечна сила Q :

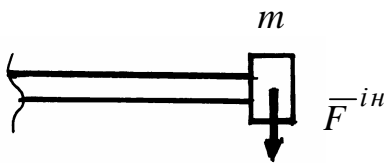
$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Тому що $Q = \frac{\partial M}{\partial x} = EJ \cdot T(t) \cdot Y'''(x)$, рівняння (6.19) приймуть вигляд

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ Y''' = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Рівняння (6.20) виражають граничні умови на вільному кінці стержня.

4. На кінці стержня точковий вантаж маси m . У цьому випадку дорівнює нулю згинальний момент M , а поперечна сила Q дорівнює силі інерції вантажу:



$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = F^{in}. \end{cases} \quad (6.21)$$

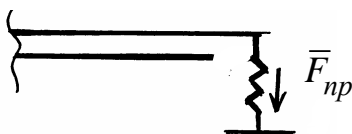
Оскільки $F^{in} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = mY(x)\ddot{T}(t) = -mY(x)\omega^2 T(t)$, рівняння (6.21)

запишуться у вигляді

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ EJY''' = -m\omega^2 Y. \end{cases} \quad (6.22)$$

Рівняння (6.22) виражають граничні умови для правого кінця стержня з розташованої на ньому зосередженою масою (при розташуванні маси на лівому кінці в другому рівнянні зміниться знак: $EJY''' = m\omega^2 Y$).

5. Пружно обпертий кінець стержня На пружно обпертому кінці стержня дорівнює нулю згинальний момент M , а поперечна сила Q дорівнює реакції опори (силі пружності F_{np}):



$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = F_{np}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Тому що $F_{np} = c \cdot y = c \cdot T(t) \cdot Y(x)$, рівняння (6.23) приймуть вигляд

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ EJY''' = cY. \end{cases} \quad (6.24)$$

Рівняння (6.24) виражають граничні умови на пружно обпертому правому кінці стержня (при розташуванні пружної в'язі на лівому кінці в другому рівнянні зміниться знак: $EJY''' = -cY$).

6.4 Приклад розрахунку власних частот і форм поперечних коливань пружного стержня

Приклад 1

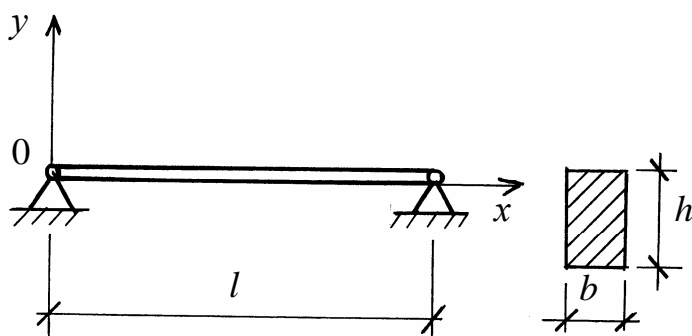


Рисунок 6.2

Визначити перші три власні частоти і побудувати власні форми поперечних коливань сталевго стержня довжиною l із шарнірно обпертими кінцями (рис. 6.2).

Стержень має прямокутний поперечний переріз:

$$J = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.25)$$

Значення параметрів: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³; $b = 6$ см;
 $h = 8$ см; $l = 8$ м.

Розв'язання

Запишемо граничні умови, використовуючи формули (6.18) для лівого (при $x = 0$) і правого (при $x = l$) кінця стержня:

$$Y(0) = 0; \quad Y''(0) = 0; \quad Y(l) = 0; \quad Y''(l) = 0. \quad (6.26)$$

Щоб скористатися граничними умовами, знайдемо другу похідну функції (6.12) по координаті x , використовуючи формули для похідних:

$$\begin{aligned}(\cos kx)^I &= -k \cdot \sin kx; \quad (\sin kx)^I = k \cdot \cos kx; \\(ch kx)^I &= k \cdot sh kx; \quad (sh kx)^I = k \cdot ch kx. \\Y''(x) &= k^2 [C_1(-\cos kx + ch kx) + C_2(-\cos kx - ch kx) + \\&+ C_3(-\sin kx + sh kx) + C_4(-\sin kx - sh kx)].\end{aligned}\quad (6.27)$$

Підставляючи (6.12) і (6.27) у перші два рівняння граничних умов (6.26) і враховуючи, що $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $ch 0 = 1$, $sh 0 = 0$, отримаємо:

$$\begin{aligned}Y(0) &= 0; \quad \text{або } C_1(1+1) + C_2(1-1) + C_3(0+0) + C_4(0-0) = 0; \\Y''(0) &= 0; \quad \text{або } k^2 [C_1(-1+1) + C_2(-1-1) + C_3(-0+0) + C_4(-0-0)] = 0.\end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Запишемо далі 3-є і 4-е рівняння граничних умов (6.26) з урахуванням знайдених C_1 і C_2 :

$$\begin{aligned}Y(l) &= 0; \quad \text{або } C_3(\sin kl + sh kl) + C_4(\sin kl - sh kl) = 0; \\Y''(l) &= 0; \quad \text{або } k^2 [C_3(-\sin kl + sh kl) + C_4(-\sin kl - sh kl)] = 0.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Система однорідних алгебраїчних рівнянь (6.28) має відмінний від нуля розв'язок тільки у випадку рівності нулю визначника цієї системи:

$$\begin{vmatrix} \sin kl + sh kl & +\sin kl - sh kl \\ -\sin kl + sh kl & -\sin kl - sh kl \end{vmatrix} = 0.\quad (6.29)$$

Розкриваючи визначник (6.29), одержимо

$$(\sin kl + sh kl) \cdot (-\sin kl - sh kl) - (\sin kl - sh kl) \cdot (-\sin kl + sh kl) = 0$$

або

$$-(\sin kl + sh kl)^2 + (\sin kl - sh kl)^2 = 0.$$

Розглядаючи останній вираз як різницю квадратів

$$(\sin kl - sh kl + \sin kl + sh kl) \cdot (\sin kl - sh kl - \sin kl - sh kl) = 0,$$

отримаємо рівняння

$$2 \cdot \sin kl \cdot (-2 \cdot sh kl) = 0.$$

Оскільки при $k \neq 0$ функція $sh kl \neq 0$, то мусить виконуватись рівняння

$$\sin kl = 0. \quad (6.30)$$

Рівняння (6.30) і буде частотним рівнянням даної задачі.

Корені рівняння (6.30):

$$k_n l = \pi \cdot n \quad (n = 1, \dots, \infty).$$

Тоді

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{l}. \quad (6.31)$$

Примітка. Корені частотного рівняння для поперечних коливань можна записати у вигляді формули (6.31) тільки у випадку шарнірного обпирання двох кінців стержня. В інших випадках граничних умов корені частотного рівняння можна знайти тільки чисельними методами.

Тепер, з огляду на формули (6.4), (6.10) та (6.25), одержимо вираз для власних частот поперечних коливань стержня з прямокутним перерізом:

$$\omega_n = k_n^2 \cdot a = k_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = k_n^2 \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot \rho \cdot b \cdot h}} = k_n^2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \quad (n=1, \dots, \infty). \quad (6.32)$$

У даному прикладі власні частоти можна обчислити з урахуванням формули (6.31). Тоді перші три власні частоти будуть:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \approx \frac{10}{64} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 8 \cdot 10^3}} \approx 17,8 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2 \cdot 4}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \approx 71,2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2 \cdot 9}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \approx 160,3 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Далі визначимо власні форми. З огляду на рівність нулю сталих C_1 і C_2 , вираз (6.12) для власних форм у даному прикладі прийме вигляд

$$Y_n(x) = C_{3n} (\sin k_n x + sh k_n x) + C_{4n} (\sin k_n x - sh k_n x) \quad (n = 1, \dots, \infty). \quad (6.33)$$

З одного з рівнянь (6.28) можна одну сталу інтегрування виразити через іншу. Наприклад, з другого рівняння (6.28)

$$C_{4n} = C_{3n} \frac{sh kl - \sin kl}{sh kl + \sin kl}. \quad (6.34)$$

Підставляючи (6.34) у (6.33), одержимо вираз для власних форм:

$$Y_n(x) = C_{3n} \left[\sin k_n x + sh k_n x + \frac{sh k_n l - \sin k_n l}{sh k_n l + \sin k_n l} (\sin k_n x - sh k_n x) \right]. \quad (6.35)$$

Тільки у випадку шарнірного обтірання двох кінців стержня, як і у даному прикладі, рівняння (6.35) можна спростити. Оскільки згідно з (6.30), $\sin k_n l = 0$, то

$$\frac{\operatorname{sh} k_n l - \sin k_n l}{\operatorname{sh} k_n l + \sin k_n l} = 1,$$

і формула (6.34) прийме вигляд

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= C_{3n} [\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x + 1 \cdot (\sin k_n x - \operatorname{sh} k_n x)] = \\ &= C_{3n} \cdot 2 \sin k_n x = C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

де $C_n = 2 \cdot C_{3n}$.

Тоді вирази і графіки (графіки будують для функцій $\tilde{Y}_n(x) = \frac{Y_n(x)}{C_n}$) для перших трьох власних форм матимуть наступний вигляд (рис. 6.3).

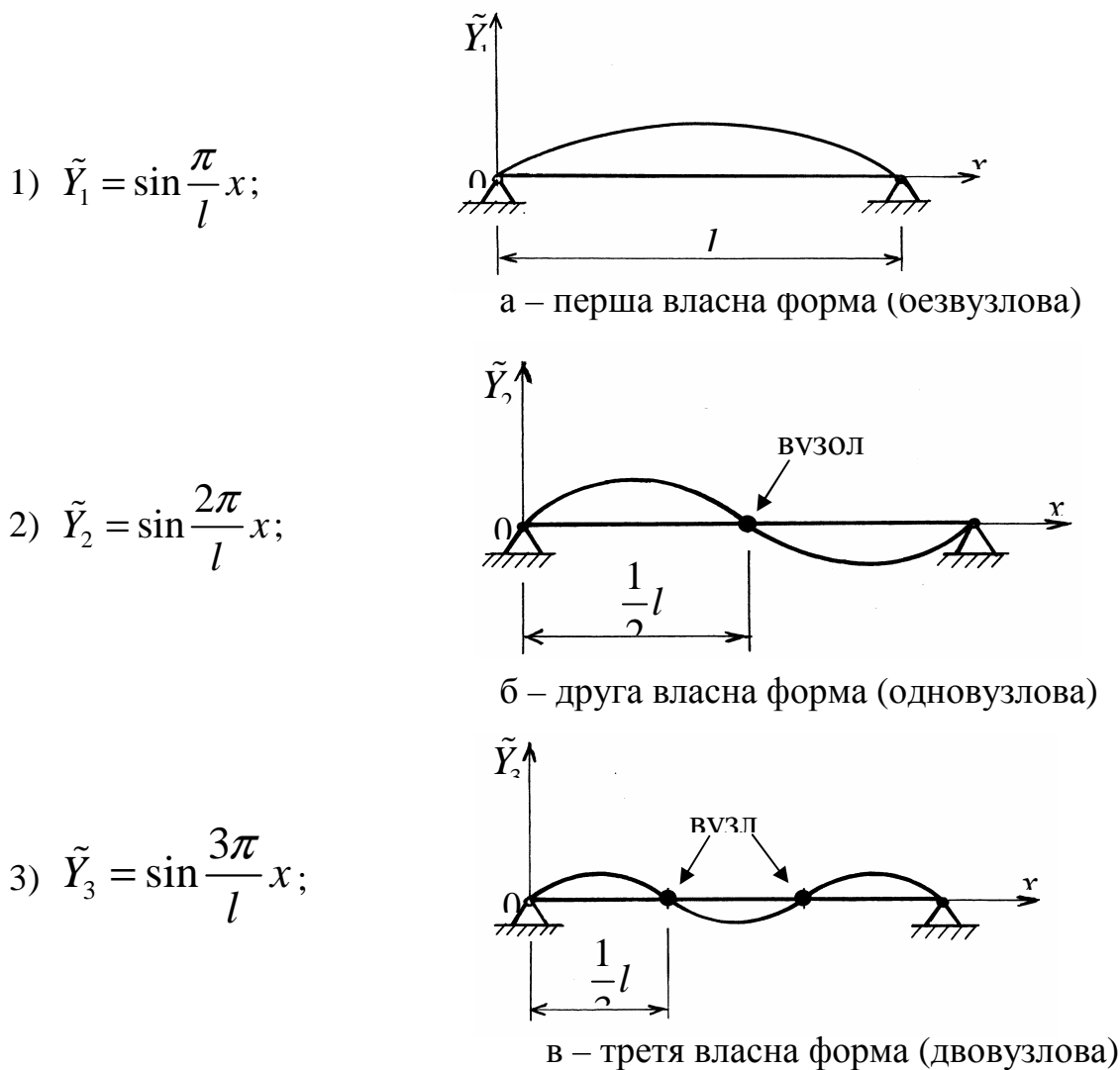


Рисунок 6.3 – форми власних поперечних коливань стержня

Відповідь. Власні частоти поперечних коливань стержня:

$$\omega_1 = 17,8 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \omega_2 = 71,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \omega_3 = 160,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

З наведених розрахунків випливає, що нижчій власній частоті ω_1 відповідає безвузлова форма коливань стержня, при якій всі точки стержня одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають максимального відхилення від нього. Зі збільшенням номера власної частоти зростає число **вузлових точок**, які при поперечних коливаннях стержня залишаються нерухомими. Лінійні координати вузлів надані на рисунку 6.3, б, в.

6.5 Вимушені поперечні коливання стержня

При розв'язанні задач про вимушені коливання стержня можна скористатись декількома способами. Найбільш загальним є спосіб розкладання заданих і шуканих функцій у ряди за власними формами коливань відповідної задачі про вільні коливання. У тих випадках, коли задане навантаження є гармонійною функцією часу (або може бути представлене сумою гармонійних складових з різними частотами), зручно застосувати спосіб безпосереднього розв'язку, отримуючи рівняння форм коливань з правою частиною.

6.5.1 Спосіб розкладання за власними формами коливань

При дії на стержень довільного збурюючого поперечного навантаження $q(x, t)$ (рис. 6.1) диференціальне рівняння руху (6.5) набуде вигляду

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q(x, t)}{\rho F}. \quad (6.37)$$

Уявимо поперечне навантаження і прогин у вигляді рядів за власними формами коливань $Y_n(x)$ відповідної задачі про вільні коливання:

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot H_n(t), \quad (6.38)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot T_n(t), \quad (6.39)$$

де $H_n(t)$, $T_n(t)$ – поки що невідомі функції часу.

Для визначення $H_n(t)$ помножимо обидві частини (6.38) на $Y_n(x)$ і зінтегруємо за координатою x :

$$\int_0^l q(x,t)Y_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l Y_k(x)Y_n(x)H_k(t)dx. \quad (6.40)$$

Для спрощення правої частини отриманого рівняння врахуємо властивості **ортogonalності власних форм коливань**, які при $F = \text{const}$ мають вигляд

$$\int_0^l Y_k(x)Y_n(x)dx = \begin{cases} = 0, n \neq k \\ \neq 0, n = k \end{cases}, \quad (6.41)$$

і той факт, що функція $H_k(t)$ не залежить від координати x . Тоді рівняння (6.40) прийме вигляд

$$\int_0^l q(x,t)Y_n(x)dx = H_n(t) \int_0^l Y_n^2(x)dx,$$

звідки

$$H_n(t) = \frac{\int_0^l q(x,t)Y_n(x)dx}{\int_0^l Y_n^2(x)dx}. \quad (6.42)$$

Визначимо далі функцію $T_n(t)$. Враховуючи лінійність задачі, можна вважати, що кожний доданок ряду (6.38) викликає рух, який описується відповідним доданком ряду (6.39). Тому диференціальне рівняння (6.37) можна записати у вигляді нескінченної системи рівнянь

$$a^2 Y_n^{IV}(x) T_n(t) + Y_n(x) \ddot{T}_n(t) = \frac{1}{\rho F} Y_n(x) H_n(t) \quad (n = 1, \dots, \infty), \quad (6.43)$$

Розділимо обидві частини n -го рівняння системи (6.43) на вираз $Y_n(x) T_n(t)$:

$$a^2 \cdot \frac{Y_n^{IV}(x)}{Y_n(x)} + \frac{\ddot{T}_n(t)}{T_n(t)} = \frac{H_n(t)}{\rho F T_n(t)}.$$

Розділяючи змінні і враховуючи результати п. 6.2, матимемо

$$-a^2 \cdot \frac{Y_n^{IV}(x)}{Y_n(x)} = \frac{\ddot{T}_n(t)}{T_n(t)} - \frac{H_n(t)}{\rho F T_n(t)} = -\omega_n^2,$$

звідки отримаємо рівняння для визначення функції $T_n(t)$:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{H_n(t)}{\rho F}. \quad (6.44)$$

Розв'язок рівняння (6.44) для довільної функції часу $H_n(t)$ має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho F \omega_n} \cdot \int_0^t H_n(\xi) \cdot \sin \omega_n(t - \xi) \cdot d\xi. \quad (6.45)$$

З урахуванням (6.42), (6.45), загальний розв'язок (6.39) набуде вигляду

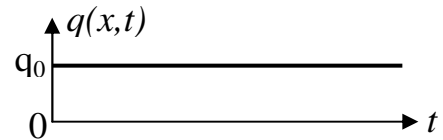
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho F \omega_n} \cdot \int_0^t H_n(\xi) \cdot \sin \omega_n(t - \xi) \cdot d\xi], \quad (6.46)$$

де сталі інтегрування A_n, B_n визначаються за допомогою початкових умов.

Рівняння (6.46) є **рівнянням вимушених поперечних коливань стержня** (при відсутності опору руху).

Приклад 2. Визначити переміщення шарнірно обпертого стержня при дії раптово прикладеного сталого за часом навантаження, що рівномірно розподілене по довжині стержня

$$q(x, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ q_0, & t \geq 0 \end{cases}.$$



Розв'язання

Складемо загальний розв'язок (6.46). Власні форми коливань шарнірно обпертого стержня мають вигляд

$$Y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Визначимо функцію $H_n(t)$. Для цього обчислимо чисельник і знаменник формули (6.42):

$$\int_0^l q(x, t) Y_n(x) dx = q_0 \int_0^l \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = q_0 \frac{l}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] =$$

$$= \begin{cases} q_0 \frac{2l}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases},$$

$$\int_0^l Y_n^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{4n\pi} \int_0^l [1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{l} \right)] d \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) =$$

$$= \frac{l}{4n\pi} [2n\pi - 0] = \frac{l}{2}.$$

Тоді

$$H_n(t) = \frac{\int_0^l q(x,t) Y_n(x) dx}{\int_0^l Y_n^2(x) dx} = q_0 \frac{2l}{n\pi} \cdot \frac{2}{l} = \frac{4}{n\pi} \cdot q_0 \quad (n=1,3,5,\dots).$$

Визначимо інтеграл

$$\int_0^t H_n(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi = \frac{4q_0}{n\pi} \cdot \int_0^t \sin[\omega_n(t - \xi)] d\xi = \frac{4q_0}{n\pi\omega_n} (1 - \cos \omega_n t) \quad (n=1,3,5,\dots).$$

Сталі інтегрування A_n, B_n з урахуванням властивості ортогональності власних форм визначаються за формулами [9] :

$$A_n = \frac{\int_0^l y(x,0) Y_n(x) dx}{\int_0^l Y_n^2(x) dx}, \quad B_n = \frac{\int_0^l \dot{y}(x,0) Y_n(x) dx}{\omega_n \int_0^l Y_n^2(x) dx},$$

де функції $y(x,0), \dot{y}(x,0)$ визначають початкові умови – розподіл переміщень точок стержня і їх швидкостей у початковий момент часу.

При нульових початкових умовах $A_n = 0, B_n = 0$, тоді переміщення точок стержня будуть визначатись функцією

$$y(x,t) = \frac{4q_0}{\rho F \pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

або з урахуванням виразу (6.32) для власних частот шарнірно обпертого стержня

$$y(x,t) = q_0 \frac{4l^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} (1 - \cos \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (6.47)$$

Проаналізуємо формулу (6.47). Для середньої точки стержня ($x=l/2$) і моменту часу, коли $\cos \omega_n t = -1$, сума ряду, що практично визначається

першим доданком, приблизно дорівнює числу 2. Тоді $y_{\max}\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{q_0 l^4 4}{EI\pi^5} \cdot 2$.

Статичне переміщення цієї ж точки стержня при дії рівномірно розподіленого навантаження, як відомо з курсу опору матеріалів [15], визначається

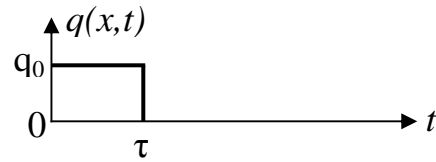
співвідношенням $y_{cm} = \frac{q_0 l^4}{EI} \cdot \frac{5}{384}$. Оскільки коефіцієнти $\frac{4}{\pi^5} \approx \frac{5}{384} \approx 0,013$,

можна зробити висновок, що максимальне динамічне переміщення середньої

точки стержня при дії раптово прикладеного навантаження перевищує її статичне переміщення приблизно у два рази.

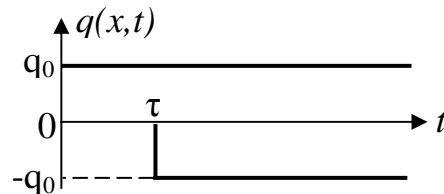
Приклад 3. Визначити переміщення шарнірно обпертого стержня при дії навантаження, рівномірно розподіленого по довжині і прямокутної форми за часом

$$q(x,t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ q_0, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$



Розв'язання

Переміщення стержня під час дії навантаження $q(x,t) = q_0$ ($t \geq 0$) визначається формулою (6.47). При $t \geq \tau$ переміщення визначається як різниця переміщень від двох раптово прикладених навантажень $q(x,t) = q_0$ ($t \geq 0$) і $q(x,t) = -q_0$ ($t \geq \tau$):



Отже, при дії навантаження прямокутної форми переміщення стержня при нульових початкових умовах має вигляд:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= q_0 \frac{4l^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} [1 - \cos \omega_n t - 1 + \cos \omega_n (t - \tau)] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \\ &= q_0 \frac{8l^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} [\sin \omega_n \frac{\tau}{2} \cdot \sin \omega_n (t - \frac{\tau}{2})] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Проаналізуємо формулу (6.48). Множник $\sin \omega_n \frac{\tau}{2}$ набуде максимального значення одиниця для тривалості імпульсу, що дорівнює половині періоду $\tau = \frac{T_n}{2}$. В цьому разі для середньої точки стержня ($x=l/2$) і моменту часу, коли

$\sin \omega_n (t - \frac{\tau}{2}) = 1$, максимальне динамічне переміщення $y_{\max}(\frac{l}{2}, t) = \frac{q_0 l^4 8}{EI\pi^5}$, як і у прикладі 2, перевищує статичне переміщення приблизно у два рази. Якщо тривалість імпульсу буде, наприклад, меншою однієї шостої періоду ($\tau < \frac{T_n}{6}$), максимальне динамічне переміщення буде меншим за статичне.

6.5.2 Спосіб безпосереднього розв'язку

При дії на стержень загального для всіх точок гармонійного збурюючого поперечного навантаження $q(x,t) = q_0(x) \sin \omega_b t$ частинний розв'язок диференціального рівняння (6.5) розшукують у вигляді

$$y(x,t) = Y(x) \cdot \sin \omega_b t, \quad (6.49)$$

де функція $Y(x)$ є **формою вимушених коливань**.

Після підстановки (6.49) у (6.5) отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння відносно функції $Y(x)$ (рівняння форм коливань з правою частиною). Повний розв'язок цього рівняння і визначає форму вимушених коливань.

Зауваження. Такими самими рівняннями відносно функції $Y(x)$ визначаються власні форми вільних коливань стержня із зосередженими масами і проміжними опорами.

Приклад 4. Виконати розрахунок динамічного гасителя коливань для системи з розподіленими параметрами.

Розв'язання

Розглянемо шарнірно обпертий стержень, на який в точці з координатою $x = x_1$ діє зосереджене гармонійне навантаження $Q_F = H \sin \omega_b t$, де H – амплітуда, ω_b – колова частота навантаження. Для зниження рівня вібрації стержня в цій же точці прикріплений динамічний гаситель коливань, що складається з вантажу маси m_0 і пружини жорсткості c_0 (рис. 6.4).

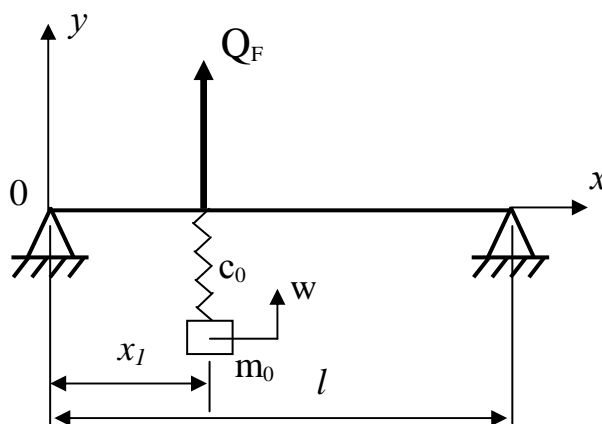


Рисунок 6.4

Система диференціальних рівнянь механічної системи, що складається із стержня і пружно приєднаного вантажу, матиме вигляд

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} [c_0(w - y_1) + H \sin \omega_B t] \cdot \delta(x - x_1) \\ m_0 \frac{d^2 w}{dt^2} + c_0(w - y_1) = 0 \end{cases}, \quad (6.50)$$

де $y_1 = y(x_1, t)$, $w = w(t)$ – переміщення перерізу стержня з координатою $x = x_1$ і вантажу відповідно, $\delta(x - x_1)$ – дельта-функція.

Будемо шукати частинний розв'язок першого рівняння (6.50) у вигляді (6.49). В цьому разі друге рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega_0^2 w = \omega_0^2 Y_1 \sin \omega_B t, \quad (6.51)$$

де $\omega_0^2 = \frac{c_0}{m_0}$ – квадрат власної (парціальної) частоти пружно приєднаного вантажу; $Y_1 = Y(x_1)$.

Частинний розв'язок рівняння (6.51) має вигляд (див. формулу (3.69))

$$w = \frac{\omega_0^2 Y_1}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t. \quad (6.52)$$

Позначимо

$$W = \frac{\omega_0^2 Y_1}{\omega_0^2 - \omega_B^2}.$$

Тоді різниця $W - Y_1$ буде

$$W - Y_1 = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_B^2} - 1 \right) Y_1 = \frac{\omega_B^2 Y_1}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \quad (6.53)$$

Підставляючи (6.49) і (6.52) у перше рівняння системи (6.50), скорочуючи всі доданки на множник $\sin \omega_B t$, а також враховуючи співвідношення (6.53), отримаємо диференціальне рівняння для функції $Y(x)$

$$Y^{\text{IV}} - k^4 Y = \frac{1}{EJ} \frac{c_0 \omega_B^2}{\omega_0^2 - \omega_B^2} Y_1 \delta(x - x_1) + \frac{1}{EJ} H \delta(x - x_1), \quad (6.54)$$

$$\text{де } k^4 = \frac{\omega_B^2}{a^2}. \quad (6.55)$$

Введемо позначення

$$\gamma_G = \frac{1}{EJ} \frac{c_0 \omega_B^2}{\omega_0^2 - \omega_B^2}, \quad \gamma_F = \frac{1}{EJ} H. \quad (6.56)$$

Тоді рівняння (6.54) набуде вигляду

$$Y^{IV} - k^4 Y = \gamma_G Y_1 \delta(x - x_1) + \gamma_F \delta(x - x_1). \quad (6.57)$$

Таким чином, рівняння (6.57) є диференціальним рівнянням для форм вимушених коливань стержня з приєднаним вантажем.

Розв'язок цього рівняння більш зручно записати за допомогою функцій О. М. Крилова [1]:

$$Y(x) = \begin{cases} Y_0(x), & 0 \leq x \leq x_1 \\ Y_0(x) + \frac{1}{k^3} [\gamma_G Y_0(x_1) + \gamma_F] \cdot V[k(x - x_1)], & x_1 \leq x \leq l \end{cases}, \quad (6.58)$$

де $Y_0(x) = AS(kx) + BT(kx) + CU(kx) + DV(kx)$; A, B, C, D – сталі інтегрування; $S(kx), T(kx), U(kx), V(kx)$ – функції Крилова, що дорівнюють

$$\begin{aligned} S(kx) &= \frac{1}{2} [(ch(kx) + \cos(kx))], & T(kx) &= \frac{1}{2} [(sh(kx) + \sin(kx))], \\ U(kx) &= \frac{1}{2} [(ch(kx) - \cos(kx))], & V(kx) &= \frac{1}{2} [(sh(kx) - \sin(kx))] \end{aligned} \quad (6.59)$$

і мають такі властивості:

$$\begin{aligned} S^I(kx) &= kV(kx), \quad T^I(kx) = kS(kx), \quad U^I(kx) = kT(kx), \quad V^I(kx) = kU(kx), \\ S(0) &= 1, \quad S^I(0) = S^{II}(0) = S^{III}(0) = 0, \\ T(0) &= 0, \quad T^I(0) = 1, \quad T^{II}(0) = T^{III}(0) = 0, \\ U(0) &= U^I(0) = 0, \quad U^{II}(0) = 1, \quad U^{III}(0) = 0, \\ V(0) &= V^I(0) = V^{II}(0) = 0, \quad V^{III}(0) = 1. \end{aligned}$$

Для визначення сталих інтегрування A, B, C, D скористуємось граничними умовами, які для шарнірно обпертого стержня, згідно з рівняннями (6.18), мають вигляд

$$Y(0) = 0, \quad Y^{II}(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad Y^{II}(l) = 0. \quad (6.60)$$

Знайдемо другу похідну (6.58) за координатою x :

$$Y''(x) = \begin{cases} Y''_O(x), & 0 \leq x \leq x_1 \\ Y''_O(x) + \frac{1}{k}[\gamma_G Y_O(x_1) + \gamma_F] \cdot T[k(x - x_1)], & x_1 \leq x \leq l \end{cases}, \quad (6.61)$$

де $Y''_O(x) = k^2[AU(kx) + BV(kx) + CS(kx) + DT(kx)]$.

Підставляючи (6.58) і (6.61) у перші два рівняння граничних умов (6.60), отримаємо

$$\begin{aligned} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 &= 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо $A = 0$, $C = 0$.

Запишемо 3-є і 4-є рівняння граничних умов (6.60) з урахуванням знайдених сталих інтегрування A , C і розкриваючи вирази $Y_O(l)$, $Y''_O(l)$, $Y_O(x_1)$:

$$\begin{aligned} BT(kl) + DV(kl) + \frac{1}{k^3} \{ \gamma_G [BT(kx_1) + DV(kx_1)] + \gamma_F \} \cdot V[k(l - x_1)] &= 0, \\ k^2 \{ BV(kl) + DT(kl) + \frac{1}{k^3} \{ \gamma_G [BV(kx_1) + DT(kx_1)] + \gamma_F \} \cdot T[k(l - x_1)] \} &= 0, \end{aligned}$$

Згрупуємо доданки відносно величин B , D :

$$\begin{aligned} \{T(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} T(kx_1) V[k(l - x_1)]\} B + \{V(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} V(kx_1) V[k(l - x_1)]\} D &= \\ &= -\frac{\gamma_F}{k^3} V[k(l - x_1)], \\ \{V(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} T(kx_1) T[k(l - x_1)]\} B + \{T(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} V(kx_1) T[k(l - x_1)]\} D &= \\ &= -\frac{\gamma_F}{k^3} T[k(l - x_1)]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

З отриманої системи неоднорідних алгебраїчних рівнянь (6.62) визначимо методом Крамера сталі інтегрування B , D :

$$B = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad D = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (6.63)$$

де визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ мають вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} T(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} T(kx_1)V[k(l-x_1)] & V(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} V(kx_1)V[k(l-x_1)] \\ V(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} T(kx_1)T[k(l-x_1)] & T(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} V(kx_1)T[k(l-x_1)] \end{vmatrix}, \quad (6.64)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\gamma_F}{k^3} V[k(l-x_1)] & V(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} V(kx_1)V[k(l-x_1)] \\ -\frac{\gamma_F}{k^3} T[k(l-x_1)] & T(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} V(kx_1)T[k(l-x_1)] \end{vmatrix}, \quad (6.65)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} T(kx_1)V[k(l-x_1)] & -\frac{\gamma_F}{k^3} V[k(l-x_1)] \\ V(kl) + \frac{\gamma_G}{k^3} T(kx_1)T[k(l-x_1)] & -\frac{\gamma_F}{k^3} T[k(l-x_1)] \end{vmatrix}. \quad (6.66)$$

Розкриваючи визначники (6.64)-(6.66) і враховуючи формули для функцій Кривої (6.59), отримаємо

$$\Delta = sh(kl) \sin(kl) - \frac{\gamma_G}{2k^3} \Psi(x_1), \quad (6.67)$$

де $\Psi(x_1) = sh(kl) \sin(kx_1) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) sh(kx_1) sh[k(l-x_1)]$

$$\Delta_1 = \frac{\gamma_F}{2k^3} \{ sh(kl) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) sh[k(l-x_1)] \}, \quad (6.68)$$

$$\Delta_2 = \frac{\gamma_F}{2k^3} \{ -sh(kl) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) sh[k(l-x_1)] \}. \quad (6.69)$$

Підставляючи (6.68) і (6.69) у формули (6.63), визначимо сталі інтегрування B, D :

$$B = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\gamma_F}{2k^3 \Delta} \{ sh(kl) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) sh[k(l-x_1)] \}, \quad (6.70)$$

$$D = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\gamma_F}{2k^3 \Delta} \{ -sh(kl) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) sh[k(l-x_1)] \}. \quad (6.71)$$

Перетворимо вираз для функції $Y_o(x)$, що входить у формулу (6.58), з урахуванням нульових сталих A, C і формул (6.67), (6.70), (6.71) до вигляду

$$\begin{aligned} Y_o(x) &= BT(kx) + DV(kx) = \frac{\gamma_F}{2k^3 \Delta} \Psi(x) = \\ &= \frac{\gamma_F}{2k^3} \frac{\Psi(x)}{[sh(kl) \sin(kl) - \frac{\gamma_G}{2k^3} \Psi(x_1)]}, \end{aligned} \quad (6.72)$$

де $\Psi(x) = sh(kl) \sin(kx) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) sh(kx) sh[k(l-x_1)]$.

Таким чином, *рівняння форм вимушених коливань стержня з приєднаним вантажем* $Y(x)$ має вигляд (6.58), де функція $Y_0(x)$ визначається за формулою (6.72).

Проаналізуємо отримані результати.

1. Вільні коливання.

Рівність нулю визначника системи (6.67)

$$\Delta = sh(kl)\sin(kl) - \frac{\gamma_G}{2k^3}\Psi(x_1) = 0, \quad (6.73)$$

якщо у якості змінного розглядати параметр k , є *частотним рівнянням* стержня з приєднаним вантажем. З цього рівняння можна визначити *власні частоти* розглядуваної системи. Відмітимо, що у випадку відсутності приєданого вантажу ($\gamma_G = 0$) рівняння (6.73) збігається з частотним рівнянням шарнірно обпертого стержня (6.30).

Щоб з'ясувати особливості спектру власних частот системи, розглянемо стержень з параметрами: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³; $b = 6$ см; $h = 8$ см;

$l = 8$ м; $D_1 = \frac{c_0 l^3}{EJ}$; $D_2 = \frac{M}{m_0} = 10$, де M – маса стержня; $\xi = \frac{l}{x_1}$ – параметр,

що визначає точку прикріплення гасителя. Параметри D_1 , D_2 є безрозмірними і виражають: D_1 – відношення жорсткостей гасителя і стержня, D_2 – відношення мас стержня і гасителя. Результати чисельного розв'язання трансцендентного рівняння (6.73) і визначення власних частот за формулою (6.32) наведені в таблиці 6.1, де $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – власні частоти системи, ω_0 – парціальна частота гасителя (виділена у таблиці пунктиром), n, n' – число вузлів відповідних форм коливань (різних конфігурацій).

З результатів розрахунків витікає, що прикріплення до стержня гасителя призводить до появи нової власної частоти у спектрі частот системи, близької до парціальної частоти ω_0 . При цьому власні частоти стержня з гасителем, окрім нової частоти, що менші за частоту ω_0 , лежать нижче, а частоти більші за ω_0 – вище власних частот стержня без гасителя (у порівнянні з першим рядком табл. 6.1).

Проте в окремих випадках, коли точка прикріплення гасителя знаходиться у вузловій точці певної форми коливань стержня без гасителя, власна частота, що відповідає цій формі, залишається незмінною і для стержня з гасителем. Так, для $\xi=2$ (гаситель прикріплений до середини стержня) такою

буде частота $\omega_2 = 71,23$ рад/с, що відповідає одновузловій формі коливань стержня без гасителя (рис. 6.3), а також вищі частоти, що відповідають формам коливань з вузлом у точці прикріплення гасителя.

Таблиця 6.1

№	система	ξ	D_1	спектр власних частот, рад/с
1	стержень без гасителя	-	-	
2	стержень з гасителем	2,33	150	
3		2,33	300	
4		2,33	410	
5		2,33	800	
6		2	150	

Власні форми коливань стержня з гасителем можна визначити за формулою (6.58), якщо покласти параметр $\gamma_F = 0$. На рисунку 6.5 представлені графіки перших чотирьох форм коливань стержня з гасителем при $\xi=2,33$ (точка прикріплення гасителя має координату $x_1=l/2,33=3,43\text{м}$) для відносної жорсткості $D_1=150$. При таких значеннях D_1 парціальна частота гасителя (див. другий рядок табл. 6.1) близька до другої власної частоти стержня без гасителя. Як видно з рисунків, двом частотам системи, що близькі до частоти стержня без гасителя, відповідають форми коливань з таким самим числом вузлів, як і відповідна форма коливань стержня без гасителя.

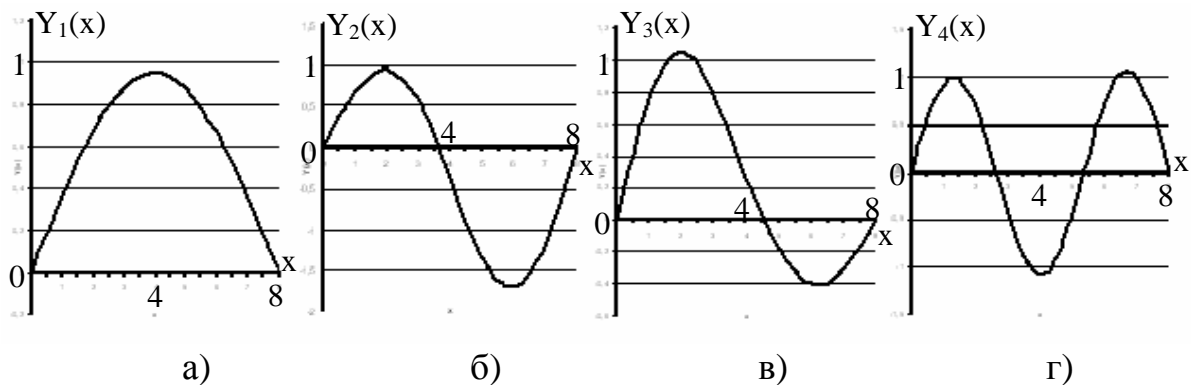


Рисунок 6.5 – форми власних коливань стержня з гасителем ($D_1=150$; $\xi=2,33$)

У випадку, коли значення парціальної частоти гасителя знаходиться поміж власними частотами стержня без гасителя, новій власній частоті системи можуть відповідати «перехідні» форми коливань з різним числом вузлів. На рисунку 6.6 представлена третя власна форма коливань системи для парціальних частот гасителя, що приймають значення поміж другою і третьою власними частотами стержня без гасителя ($D_1=150$; 300; 410; 800; див. другий – п'ятий рядки табл. 6.1). Як видно з рисунків, третя форма коливань може бути безвузловою, одно- (двох різних конфігурацій) і двовузловою при звичайних перших двох формах (без- і одновузлової).

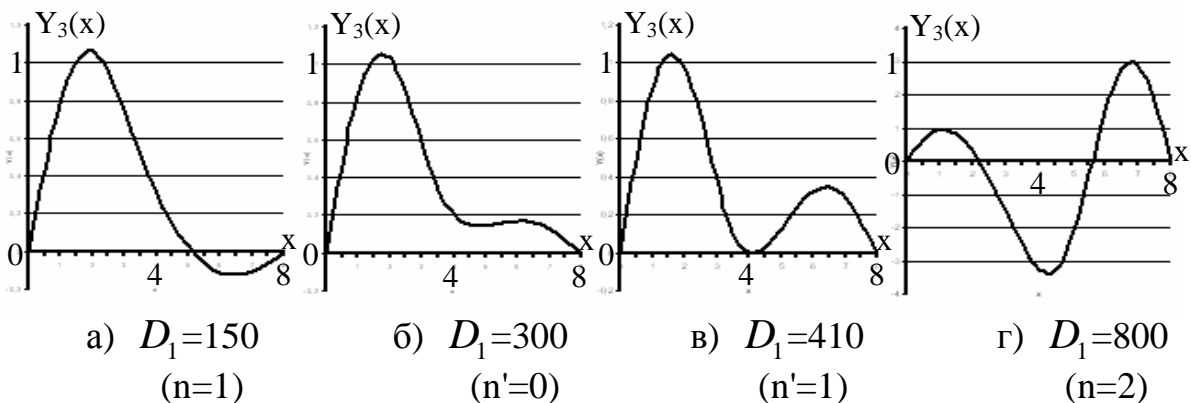


Рисунок 6.6 – третя форма власних коливань стержня з гасителем ($\xi=2,33$)

В окремих випадках, наприклад, при $\xi=2$ (гаситель прикріплений до середини стержня: $x_1=l/2=4\text{м}$), наведені закономірності можуть приймати інший вигляд. На рисунку 6.7 представлені графіки перших чотирьох форм коливань стержня з гасителем при відносній жорсткості $D_1=150$. При таких значеннях D_1 парціальна частота гасителя (див. шостий рядок табл. 6.1) близька до другої власної частоти стержня без гасителя. Як видно з рисунків, другій і третій частотам системи, що близькі до частоти стержня без гасителя, відповідають форми коливань з різним числом вузлів. При цьому за другою одновузловою формою слідує третя безвузлова форма коливань, що обумовлено приєднанням до стержня гасителем.

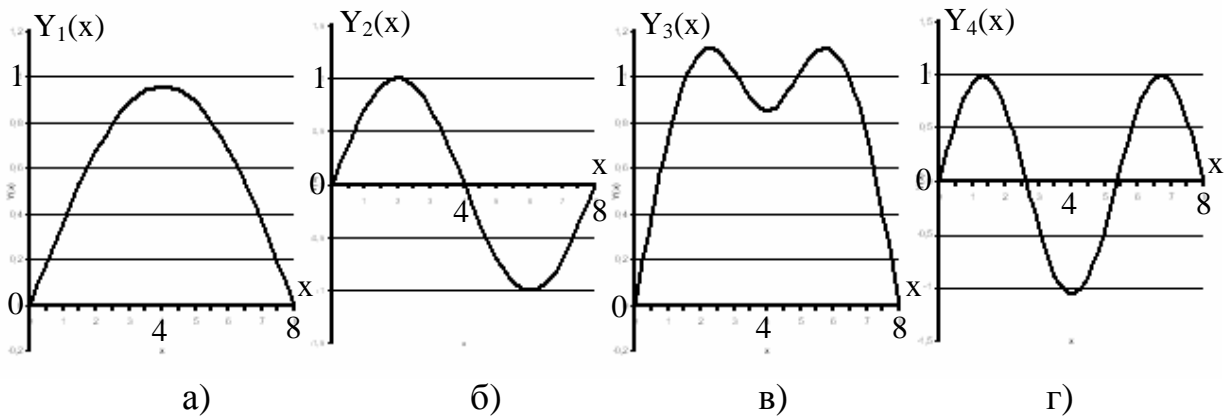


Рисунок 6.7 – форми власних коливань стержня з гасителем ($D_1=150$; $\xi=2$)

На рисунку 6.8 представлені графіки другої (а) – третьої (б, в, г) власної форми коливань стержня з гасителем для різних параметрів D_1 . З рисунків видно, що параметрам $D_1=100$ і $D_1=200$ відповідає безвузлова, $D_1=380$ – одновузлова, $D_1=400$ – двохвузлова форми коливань. Слід відмітити, що для $D_1=100$ третьою, а для $D_1=200$; 380; 400 другою буде одновузлова форма коливань, що відповідає другій власній частоті стержня без гасителя і не змінюється при варіюванні параметра D_1 , оскільки відповідна форма коливань має вузол у точці прикріплення гасителя.

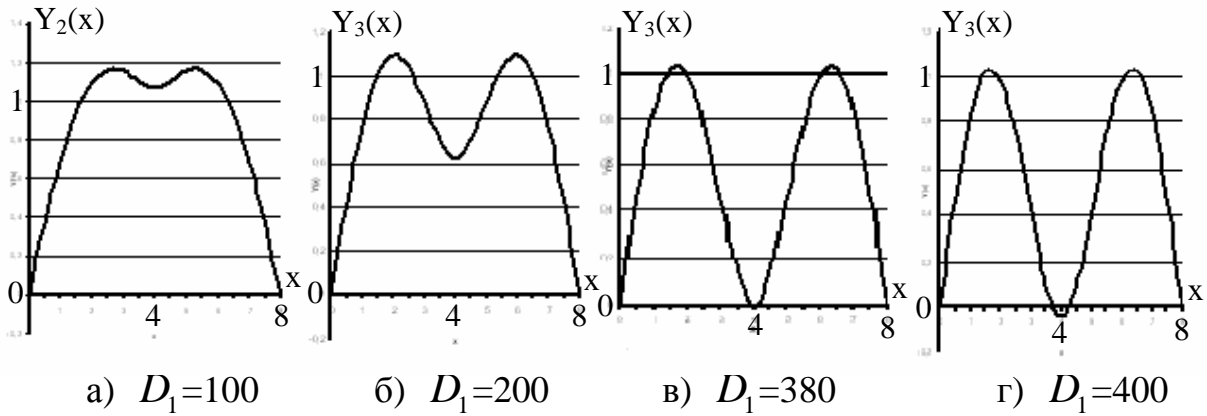


Рисунок 6.8 – друга (а) і третя (б, в, г) форми власних коливань стержня з гасителем ($\xi=2$)

2. Вимушені коливання.

Розглянемо випадок, коли парціальна частота гасителя ω_0 співпадає з частотою ω_B гармонійного навантаження Q_F : $\omega_0 = \omega_B$ (гаситель «налаштований» на частоту збурювання). В цьому разі параметр γ_G , що визначається формулою (6.56), прагне в нескінченність. Знаменник формули (6.72) також прагне в нескінченність, тому для будь-якої координати x функція $Y_0(x) \equiv 0$. Вираз, що входить у формулу (6.58):

$$\gamma_G Y_0(x_1) + \gamma_F = \frac{\gamma_G \gamma_F \Psi(x_1)}{-\gamma_G \Psi(x_1)} + \gamma_F = -\gamma_F + \gamma_F = 0.$$

Тому для будь-якої координати x функція форми вимушених коливань (6.58) дорівнює нулю $Y(x) \equiv 0$. Це означає, що *при встановленні динамічного гасителя в точку прикладення збурюючої сили стержень буде знаходитись у стані спокою, якщо власна частота гасителя ω_0 співпадає з частотою гармонійного навантаження ω_B : $\omega_0 = \omega_B$.*

Дослідимо поведінку гасителя. Вимушені коливання вантажу описуються рівнянням (6.52). Перетворимо, враховуючи формули (6.56), вираз

$$Y_0(x_1) = \frac{\gamma_F \Psi(x_1)}{-\gamma_G \Psi(x_1)} = -\frac{\gamma_F}{\gamma_G} = -\frac{H}{c_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega_B^2)}{\omega_B^2}. \quad (6.74)$$

Підставляючи (6.74) у (6.52), отримаємо *рівняння вимушених коливань вантажу за умови динамічного гасіння коливань стержня ($\omega_0 = \omega_B$)*

$$w = \frac{\omega_0^2 Y_0(x_1)}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t = -\frac{H}{c_0} \sin \omega_B t. \quad (6.75)$$

Формула (6.75) збігається з формулою (4.31), тобто приєднаний вантаж здійснює вимушені коливання у протифазі зі збурюючою силою, компенсуючи її дію на стержень. З формули (6.75) також витікає умова, подібна до (4.32), за якої можна підібрати жорсткість пружини c_0 так, щоб амплітуда вимушених коливань вантажу не перевищувала певного значення $A_{\text{задане}}$:

$$|W| = \frac{H}{c_0} \leq A_{\text{задане}}. \quad (6.76)$$

Питання для самоконтролю

1. Які закони використовуються для отримання диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
2. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
3. Як формується частотне рівняння поперечних коливань стержня?
4. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
5. Що називають граничними умовами і якими рівняннями виражаються ці умови для защемленого кінця при поперечних коливаннях стержня?
6. Як визначають власні форми поперечних коливань стержня?
7. Яким методом розшукують розв'язок диференціального рівняння вимушених поперечних коливань стержня?
8. Як математично виражаються властивості ортогональності власних форм поперечних коливань стержня?
9. Як погасити вимушені поперечні коливання стержня при дії на нього зосередженого гармонійного навантаження?

7 Наближені методи визначення власних частот поперечних коливань стержнів

7.1 Метод Релея (енергетичний метод)

Розглянемо стержень із зосередженими масами, який здійснює малі вільні коливання (рис. 7.1), де $Y(x)$ – власна форма коливань стержня, $Y_1 = Y(x_1)$, $Y_2 = Y(x_2)$, $Y_3 = Y(x_3)$.

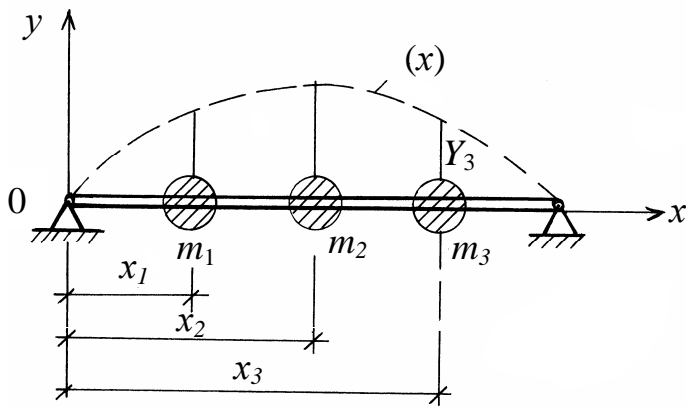


Рисунок 7.1

При відсутності опору повна механічна енергія стержня відповідно до закону збереження енергії залишається незмінною:

$$T + \Pi = h = \text{const} . \quad (7.1)$$

Якщо стержень робить одне з головних коливань, то всі його точки одночасно досягають положень найбільшого відхилення від положення

рівноваги. У цей момент швидкості всіх точок дорівнюють нулю, а значить кінетична енергія $T = 0$, потенціальна ж енергія досягає максимуму: $\Pi = \Pi_{\max} = h$. Коли точки стержня проходять через положення рівноваги, то координати всіх точок дорівнюють нулю, а значить $\Pi = 0$. При цьому кінетична енергія максимальна: $T = T_{\max} = h$. З наведених міркувань випливає, що при здійсненні стержнем одного з головних коливань виконується співвідношення

$$T_{\max} = \Pi_{\max} . \quad (7.2)$$

Тому що прогин стержня $y(x, t)$ змінюється в часі за гармонійним законом, його можна подати у вигляді добутку

$$y(x, t) = Y(x) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (7.3)$$

де ω - власна частота; ε - початкова фаза коливань.

Диференціюючи (7.3) за часом, одержимо вираз для швидкостей точок стержня:

$$\dot{y}(x, t) = Y(x) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (7.4)$$

Тоді

$$y_{\max}(x) = y(x, t) \Big|_{\sin(\omega t + \varepsilon) = 1} = Y(x), \quad (7.5)$$

$$\dot{y}_{\max}(x) = \dot{y}(x, t) \Big|_{\cos(\omega t + \varepsilon) = 1} = \omega \cdot Y(x).$$

Припускаючи, що потенціальна енергія стержня обумовлена тільки деформацією згину, одержимо:

$$\Pi = A_M = \int_0^l \frac{1}{2} M \cdot d\theta = \int_0^l \frac{1}{2} M \cdot \frac{M}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dx,$$

де M – згинальний момент; θ – кут повороту перерізу, рівний $\theta = \frac{dy}{dx}$;

$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EJ}$ – диференціальне рівняння вигнутої осі стержня; l – довжина стержня.

Отже,

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (Y'')^2 dx. \quad (7.6)$$

Кінетична енергія обумовлена кінетичною енергією стержня і точкових мас. Для i -ї точкової маси

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_{i\max}^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot \dot{y}_{i\max}^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot \omega^2 \cdot Y^2(x_i) = \frac{1}{2} m_i \cdot \omega^2 \cdot Y_i^2,$$

де v_i – швидкість точкової маси.

Для стержня

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int \dot{y}_{\max}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{y}_{\max}^2 \cdot \rho F dx = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx,$$

де ρ – густина матеріалу стержня; F – площа його поперечного перерізу.

Отже, для стержня з приєднаними масами

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot Y_i^2 \right), \quad (7.7)$$

де N – число точкових мас.

Підставляючи (7.6) і (7.7) у (7.2), одержимо

$$\frac{1}{2} \omega^2 \left(\int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot Y_i^2 \right) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (Y'')^2 dx.$$

Звідки

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ (Y'')^2 dx}{\int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot Y_i^2}. \quad (7.8)$$

Вираз (7.8) визначає **формулу Релея для квадрата власної частоти поперечних коливань стержня із зосередженими масами**.

Примітка 1. Якщо $y(x)$ – дійсна форма коливань, то формула (7.8) дає точне значення (у рамках зроблених припущень) для даної форми коливань.

Примітка 2. Для стержнів із зосередженими масами дійсна форма коливань заздалегідь не відома. *Наближення* полягає в тому, що форма $y(x)$ вибирається приблизно, але *обов'язково* задовольняє геометричним граничним умовам (умовам, що накладаються на прогин і кут повороту на кінцях стержня). Практично можна скористатися декількома варіантами вибору форми $y(x)$:

1) як $y(x)$ вибрати форму коливань стержня без мас *при таких же граничних умовах*, як і для стержня з масами;

2) як $y(x)$ вибрати будь-як функцію, що задовольняє граничним умовам (чим ближче обрана функція буде до істинної форми, тим точніше вийде значення власної частоти);

3) як $y(x)$ вибрати статичну криву вигину під дією сил ваги зосереджених мас (у цьому випадку можна визначити тільки основну (нижчу) власну частоту).

Примітка 3. Масштаб наближеної функції значення не має, тому що ця функція входить і в чисельник, і в знаменник формули (7.8) в однаковому степені.

Примітка 4. Формула Релея дає завищене значення (верхню границю) власної частоти:

$$\omega_{\text{дійсне}} \leq \omega_{\text{Релея}},$$

де $\omega_{\text{дійсне}}$ – дійсне значення власної частоти.

7.2 Метод Донкерлі (метод «зведення» мас)

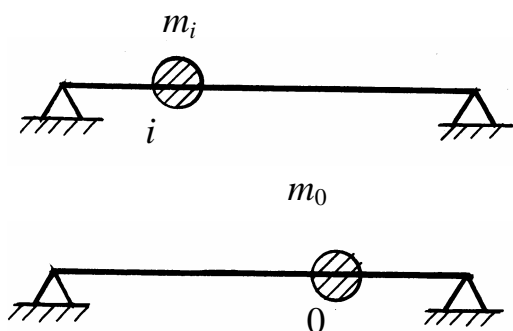


Рисунок 7.2

Припустимо, що в деякій точці пружного стержня знаходиться зосереджена маса m_i (рис. 7.2). Якщо зневажити масою стержня, то це буде система з одним степенем вільності і її власна частота дорівнюватиме

$$\omega_i = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}, \quad (7.9)$$

де c_i – коефіцієнт жорсткості пружної в'язі для маси m_i .

Помістимо в деякій іншій точці O , обраній за центр зведення, іншу масу m_0 таку, що власна частота нової системи $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}$ буде дорівнювати частоті ω_i :

$$\omega_0 = \omega_i. \quad (7.10)$$

Тоді зведена маса m_0 знаходиться зі співвідношення

$$m_0 = \frac{c_0}{c_i} m_i. \quad (7.11)$$

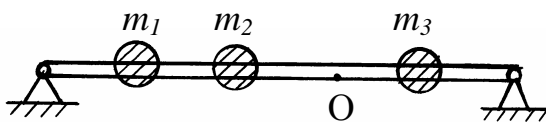
Отже, перенесення маси m_i в точку O не викликає зміни власної частоти системи, якщо її помножити на коефіцієнт зведення $\frac{c_0}{c_i}$.

Розглянемо стержень, масу якого будемо враховувати, що несе N зосереджених мас (рис. 7.3, а). Зведення кожної з мас і маси стержня до деякої точки O мусить відбуватися зі своїм коефіцієнтом зведення (рис. 7.3, б):

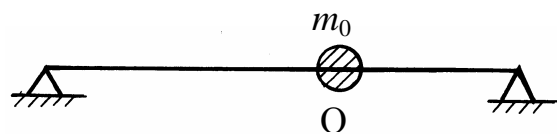
$$m_0 = \frac{c_0}{c_1} m_1 + \dots + \frac{c_0}{c_N} m_N + c_0 \int_0^l \frac{dm}{c(x)}. \quad (7.12)$$

Розділивши обидві частини на , одержимо

$$\frac{m_0}{c_0} = \frac{m_1}{c_1} + \dots + \frac{m_N}{c_N} + \int_0^l \frac{dm}{c(x)}$$



а)



б)

Рисунок 7.3

або, з огляду на (7.9), запишемо

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \dots + \frac{1}{\omega_N^2} + \frac{1}{\omega_c^2}, \quad (7.13)$$

де ω_0 – власна частота стержня із зосередженими масами, «зведеними» до деякої точки О; $\omega_1, \dots, \omega_N$ – власні частоти приватних систем з одним ступенем вільності, що складаються тільки з мас m_1, \dots, m_N відповідно без урахування маси стержня; ω_c – власна частота поперечних коливань стержня (з урахуванням його маси) без зосереджених мас.

Вираз (7.13) визначає **формулу Донкерлі для квадрата основної власної частоти поперечних коливань стержня з зосередженими масами**.

Примітка 1. Формула (7.13) є наближеною, тому що при перенесенні мас не враховується взаємний вплив цих мас.

Примітка 2. Формула Донкерлі дає завжди занижене значення (нижню границю) власної частоти:

$$\omega_{\text{Донкерлі}} \leq \omega_{\text{дійсне}}. \quad (7.14)$$

Примітка 3. При практичних розрахунках формулу Донкерлі зручно подати у вигляді

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_c^2} + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \delta_{ii}, \quad (7.15)$$

де $\delta_{ii} = \frac{1}{c_i}$ – **коефіцієнт податливості** (впливу) або **одиничне**

переміщення – переміщення точки приєднання маси m_i під дією одиничної сили, прикладеної в тій же точці (рис. 7.4). Одиничне переміщення δ_{ii} можна визначити за допомогою інтеграла Мора:

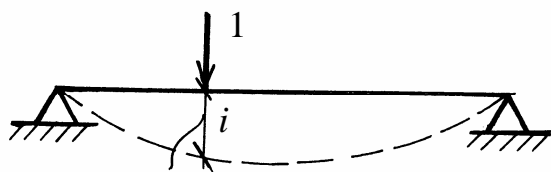


Рисунок 7.4

$$\delta_{ii} = \int_0^l \frac{M_i M_i}{EJ} dx, \quad (7.16)$$

де M_i – згинальний момент, що виникає в перерізі стержня, де розміщена i -та маса, при дії одиничної сили.

7.3 Приклад розрахунку основної частоти поперечних коливань стержня з приєднаними масами

Для визначення основної власної частоти стержня з приєднаними масами зручно застосувати одночасно методи Релея і Донкерлі, що дозволяють одержати верхню і нижню границі для дійсного значення частоти

$$\omega_{\text{Донкерлі}} \leq \omega_{\text{дійсне}} \leq \omega_{\text{Релея}}. \quad (7.17)$$

Приклад 1.

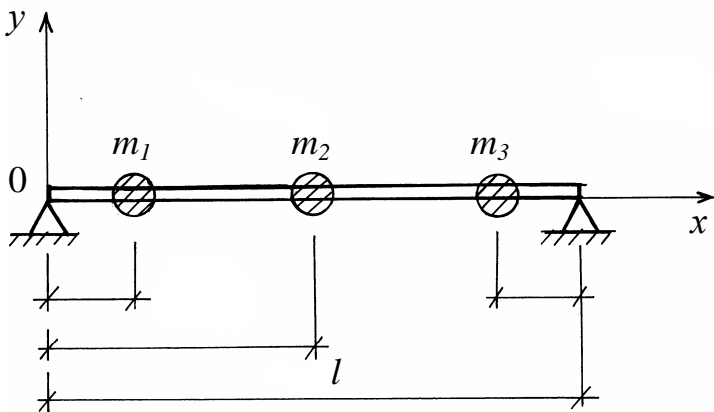


Рисунок 7.5

Шарнірно обпертий на кінцях стержень сталого прямокутного перерізу довжиною l (рис. 7.5) несе три зосереджені маси. Одна маса розташована посередині стержня, а дві інші – симетрично щодо середини. Розташування симетричних мас задається за допомогою коефіцієнта k_m , тоді координати зосередження мас

координати зосереджених мас будуть визначатися співвідношеннями

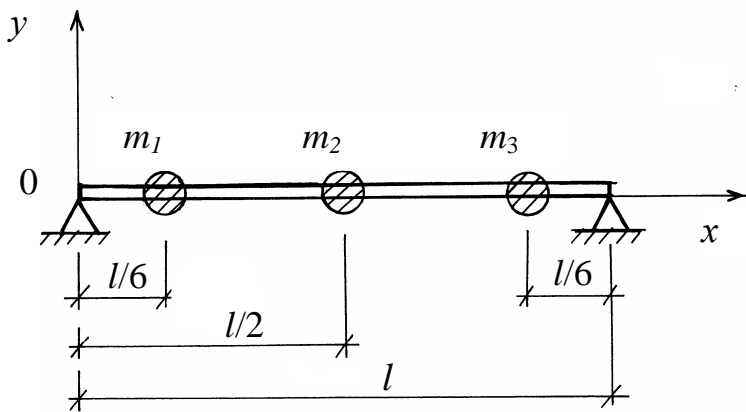
$$x_1 = \frac{l}{k_m}; \quad x_2 = \frac{l}{2}; \quad x_3 = \frac{k_m - 1}{k_m} l.$$

Маси визначаються коефіцієнтами k_1 , k_2 , k_3 і k_c (для стержня):

$$m_1 = k_1 \cdot m; \quad m_2 = k_2 \cdot m; \quad m_3 = k_3 \cdot m; \quad m_c = k_c \cdot m \text{ (для стержня),}$$

де m – деякий параметр, що має розмірність маси.

Визначити верхню і нижню границі діапазону частот, якому належить дійсне значення основної власної частоти стержня (рис. 7.6) з параметрами:



$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \\ k_1 &= k_2 = k_3 = k_c = 1; \\ k_m &= 6; \\ b &= 6 \text{ см}; \\ h &= 8 \text{ см}; \\ l &= 8 \text{ м}; \\ m &= 10 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Рисунок 7.6

Розв'язання

1. Визначення основної власної частоти методом Релея.

Задамо основну форму коливань у вигляді

$$Y(x) = \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Ця функція задовольняє граничним умовам при шарнірному обпиранні:

$$\begin{aligned} Y(0) &= 0; & Y(l) &= 0; \\ Y''(0) &= 0; & Y''(l) &= 0 \end{aligned}$$

і є основною власною формою поперечних коливань стержня без зосереджених мас.

Обчислимо інтеграл вигляду:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx &= \frac{l}{\pi} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \left(\frac{\pi x}{l} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{\pi} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) d \left(\frac{2\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{\pi} \left[\frac{2\pi x}{l} \Big|_0^l - \sin \frac{2\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{\pi} [2\pi - 0] = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Знайдемо чисельник формули (7.8):

$$\begin{aligned} Y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \\ \int_0^l EJ (Y'')^2 dx &= EJ \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ \pi^4}{2l^3}. \end{aligned}$$

Обчислимо знаменник формули (7.8):

$$Y_1 = Y(x_1) = Y\left(\frac{l}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6},$$

$$Y_2 = Y(x_2) = Y\left(\frac{l}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2},$$

$$Y_3 = Y(x_3) = Y\left(\frac{5l}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{5l}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2 + m_3 Y_3^2 = \\ & = \rho F \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + m_1 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6}\right) + m_2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) + m_3 \sin^2 \left(\frac{5\pi}{6}\right) = \\ & = \rho F \frac{l}{2} + \frac{m_1}{4} + m_2 + \frac{m_3}{4} = \frac{m_c}{2} + \frac{m_1}{4} + m_2 + \frac{m_3}{4} = \\ & = \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + m + \frac{m}{4} = 2m, \end{aligned}$$

де $\rho Fl = m_c$ – маса стержня.

Складаючи формулу (7.8), одержимо:

$$\omega^2 = \frac{EJ\pi^4}{2l^3 \cdot 2m} = \frac{EJ\pi^4}{4ml^3}$$

або

$$\omega_{Релея} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 5 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 5 \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot m \cdot l^3}} = 50 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

2. Визначення основної власної частоти методом Донкерлі.

Розглянемо приватні системи, з яких складається заданий стержень із зосередженими масами (рис. 7.7-7.10). У всіх приватних системах граничні умови такі ж, як і для заданого в умові задачі стержня: шарнірне обпирання на кінцях.

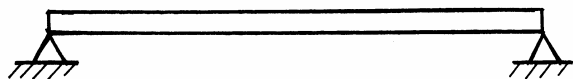


Рисунок 7.7 – Система 1 – стержень без зосереджених мас (маса стержня враховується)

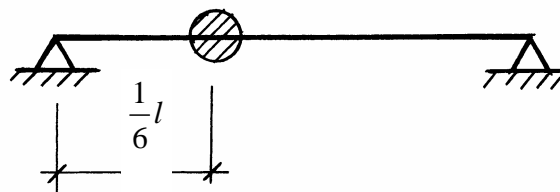


Рисунок 7.8 – Система 2 – невагомий стержень із зосередженою масою

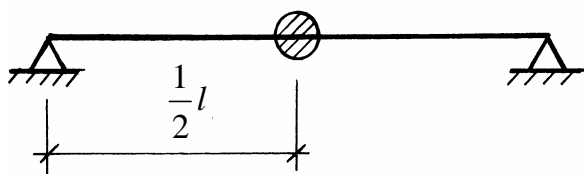


Рисунок 7.9 – Система 3 – невагомий стержень із зосередженою масою

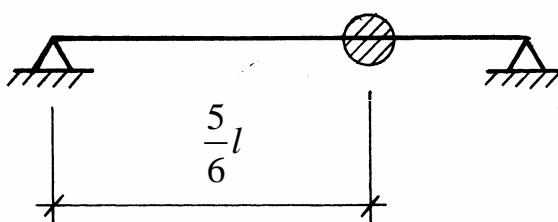


Рисунок 7.10 – Система 4 – невагомий стержень із зосередженою масою

Для системи 1 (рис. 7.7), відповідно до формули (6.31), основна власна частота поперечних коливань стержня

$$\omega_c = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}.$$

Тоді
$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{l^4}{\pi^4} \cdot \frac{\rho F}{EJ} = \frac{l^3}{\pi^4} \cdot \frac{\rho F \cdot l}{EJ} = \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{m_c \cdot l^3}{EJ}.$$

Для визначення коефіцієнта податливості δ_{11} системи 2 (рис.7.8) прикладемо до стержня одиничну силу в точці, що відповідає місцю приєднання зосередженої маси (рис. 7.11). Визначимо реакції опор (їхні значення рівні $5/6$ і $1/6$) і побудуємо епюру згинального моменту M_1 . При цьому використовуємо відносне правило знаків, при якому епюра моментів будується на розтягнутому волокні.

За способом Верещагіна, коефіцієнт податливості пропорційний добутку площі епюри згинального моменту на ординату моменту під центром ваги фігури, яку утворює епюра. У даному прикладі її зручно розбити на два трикутники ACB і BCD (рис. 7.11).

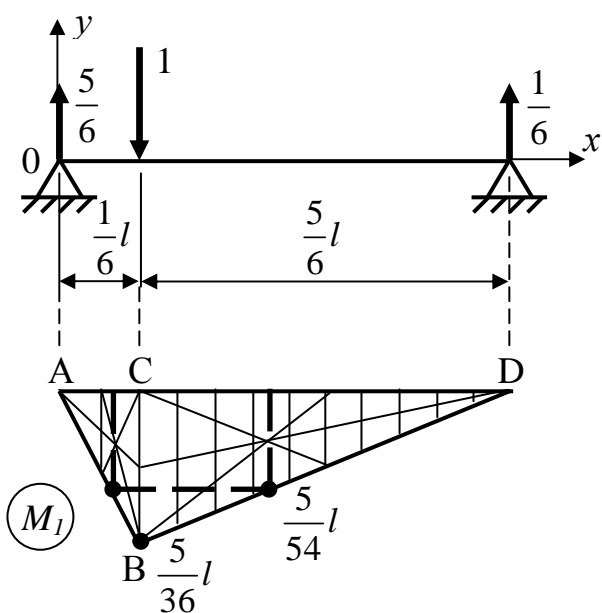


Рисунок 7.11

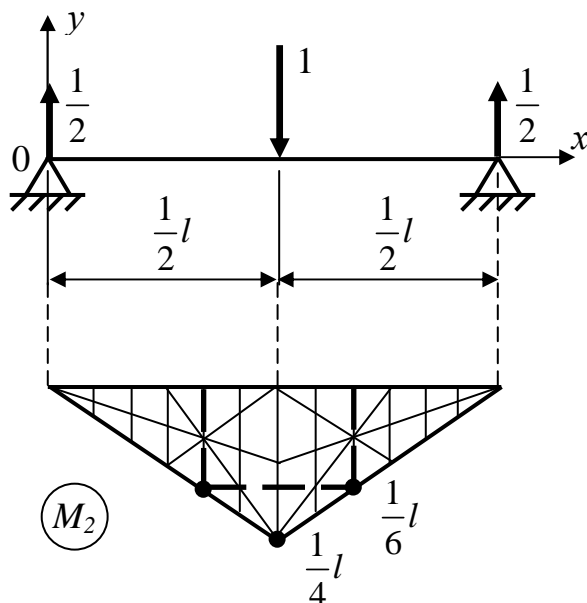


Рисунок 7.12

Тоді
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(S_{ABC} \cdot \frac{5}{54}l + S_{BCD} \cdot \frac{5}{54}l \right),$$

або

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{5}{36}l \cdot \frac{5}{54}l + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}l \cdot \frac{5}{36}l \cdot \frac{5}{54}l \right) = \frac{25}{3888} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Для системи 3 (рис. 7.9) одержимо (рис. 7.12):

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{6} \right) = \frac{1}{48} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Для системи 4 (рис. 7.10), що симетрична відносно до системи 2 (рис. 7.13), буде:

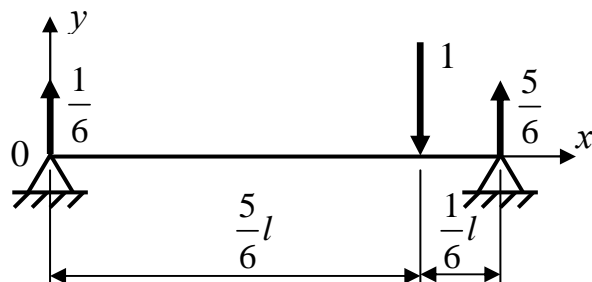


Рисунок 7.13

$$\delta_{33} = \delta_{11} = \frac{25}{3888} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

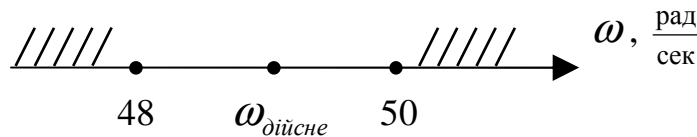
Відповідно до формули (7.15)

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{l^3}{EJ} \left(\frac{m_c}{\pi_4} + \frac{25 \cdot m_1}{3888} + \frac{m_2}{48} + \frac{25 \cdot m_3}{3888} \right) \approx \frac{ml^3}{EJ} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{48} + \frac{25}{1944} \right) \approx \frac{ml^3}{EJ} \cdot \frac{17}{400}.$$

Тоді

$$\omega_{\text{Донкерлі}} \approx \sqrt{\frac{EJ}{ml^3} \cdot \frac{400}{17}} \approx \sqrt{23,5} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \approx 4,8 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 48 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Відповідь. Основна власна частота поперечних коливань стержня за методом Донкерлі $\omega_{\text{Донкерлі}} = 48 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, за методом Релея $\omega_{\text{Релея}} = 50 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Дійсне значення основної власної частоти лежить в інтервалі $48 < \omega_{\text{дійсне}} < 50 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$.



Питання для самоконтролю

1. Яка ідея визначення власної частоти використовується у методі Релея?
2. Як можна підібрати наближену власну форму коливань у методі Релея?
3. У якому випадку формула Релея дає точне значення власної частоти?
4. Яке значення має власна частота, обчислена за формулою Релея, по відношенню до дійсного її значення?
5. Яка ідея визначення власної частоти використовується у методі Донкерлі?
6. Яке значення має власна частота, обчислена за формулою Донкерлі, по відношенню до дійсного її значення?
7. Що дозволяє оцінити одночасне застосування двох методів: Релея і Донкерлі?

8 Вільні коливання пружних пластин і оболонок

Пластиною називають тіло, обмежене двома плоскими поверхнями, відстань між якими h (h – товщина) мала у порівнянні з двома іншими розмірами тіла. Якщо поверхні, що обмежують тіло, криволінійні, то таке тіло називають **оболонкою**. Поверхня, яка рівно відстоїть від обмежуючих поверхонь, називається **серединною** (рис. 8.1).

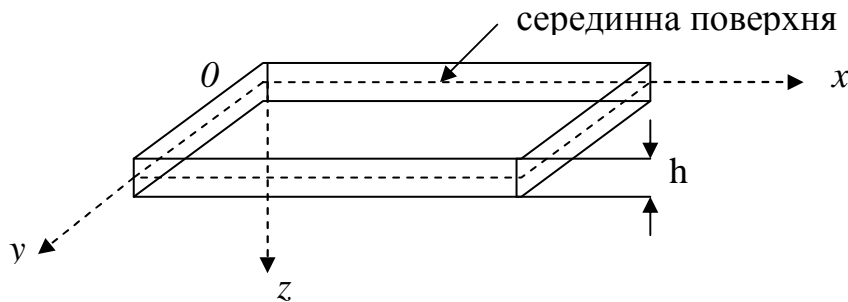


Рисунок 8.1

У подальшому будемо розглядати пластини і оболонки сталої товщини: $h = \text{const}$. Будемо також вважати, що матеріал пластини або оболонки однорідний, ізотропний і для нього виконується закон Гука, а переміщення точок малі у порівнянні з товщиною.

В основі теорії пружності пластин і оболонок лежать гіпотези Кірхгофа-Лява, які є узагальненням гіпотез поперечного згину стержнів:

- 1) прямолінійний елемент, перпендикулярний до серединної поверхні до деформації, залишається прямим і перпендикулярним до деформованої серединної поверхні і довжина цього елемента не змінюється;
- 2) нормальні напруження на площадках, паралельних серединній поверхні, малі у порівнянні з іншими напруженнями і ними можна нехтувати (гіпотеза ненадавлювання шарів пластини).

8.1 Вільні поперечні коливання пластини

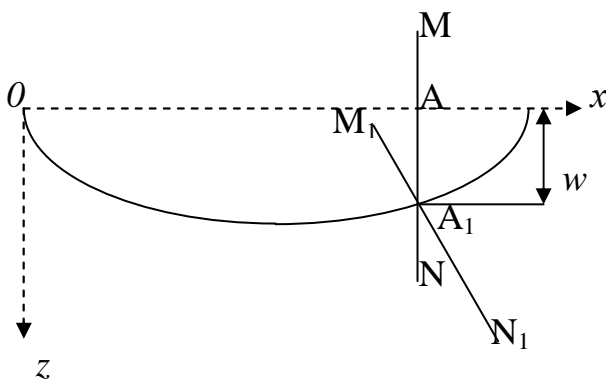


Рисунок 8.2

Сумістимо координатну площину xOy із серединною поверхнею пластини до деформації. Згідно з гіпотезами Кірхгофа-Лява, серединна поверхня при коливаннях не деформується, тобто нормальний до недеформованої поверхні елемент MN при прогині обертається навколо точки A , не змінюючи своєї довжини (рис. 8.2).

При цьому точки серединної поверхні (т. А) переміщуються тільки паралельно осі z . Переміщення точки серединної поверхні w в напрямку осі z називають **прогином**.

Диференціальне рівняння коливань можна отримати, розглядаючи рівняння рівноваги елемента пластини і застосовуючи до нього принцип Даламбера, або використовуючи варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона [1]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

де $w = w(x, y, t)$ – прогин точки серединної поверхні пластини з координатами (x, y) , який є функцією трьох змінних: координат x, y і часу t , ρ – густина матеріалу, h – товщина пластини, E – модуль пружності, μ – коефіцієнт Пуассона, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – згинна жорсткість пластини.

Відповідно до методу Фур'є, розв'язок диференціального рівняння (8.1) отримаємо у вигляді добутку функцій, одна з яких залежить тільки від координат, а друга від часу:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot T(t). \quad (8.2)$$

У цьому рівнянні функція $W(x, y)$ описує форму коливань.

Підставляючи (8.2) у (8.1), одержимо

$$\left[\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} \right] \cdot T(t) = - \frac{\rho h}{D} \cdot W(x, y) \cdot \ddot{T}(t). \quad (8.3)$$

Розділимо змінні. При цьому врахуємо, що оскільки одна частина рівняння буде залежати тільки від координат x, y , а друга – від часу t , рівність можлива тільки в тому випадку, коли ліва і права частини дорівнюють константі. Позначивши цю константу ω^2 (можна довести [1], що ця константа від'ємна), рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\left[\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} \right]}{- \frac{\rho h}{D} \cdot W(x, y)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad (8.4)$$

що еквівалентно двом диференціальним рівнянням:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = \frac{\rho h}{D} \cdot \omega^2 \cdot W(x, y), \quad (8.6)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.5), як відомо, має вигляд

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (8.7)$$

Для прямокутних пластин власні форми $W(x, y)$ звичайно розшукують у вигляді ряду, що складається з добутків двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї координати:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot X_m(x) \cdot Y_n(y), \quad (8.8)$$

де a_{mn} – сталі коефіцієнти, а функції $X_m(x), Y_n(y)$ мусять задовольняти граничним умовам.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (8.1) виходить як лінійна комбінація розв'язків (8.7) і (8.8) усієї множини m, n частот ω_{mn} :

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= W(x, y) \cdot T(t) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_m(x) \cdot Y_n(y) \cdot (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t), \end{aligned} \quad (8.9)$$

де сталі A_{mn}, B_{mn} (в які відносять і сталі a_{mn}) визначаються з початкових умов $w(x, y, 0)$ і $\dot{w}(x, y, 0)$.

У загальному випадку граничних умов на контурі пластини функції $X_m(x), Y_n(y)$ можна знайти наближеними методами, використовуючи варіаційні методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна та ін. І тільки у випадку шарнірно обпертої по двом протилежним краям пластини розв'язок рівняння (8.6) можна знайти у вигляді аналітичного виразу.

8.2 Поперечні коливання пластини з шарнірно обпертими краями

Розглянемо пластину довжиною a і шириною b (рис. 8.3).

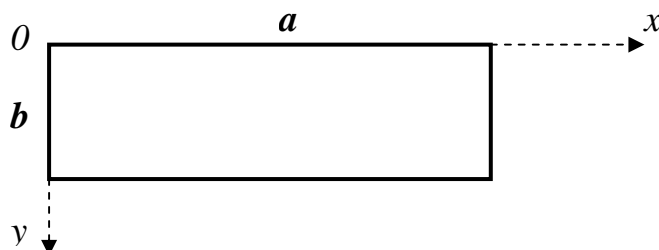


Рисунок 8.3

При шарнірному обпиранні краю на ньому мусять дорівнювати нулю прогин і згинальний момент. Зважаючи на вирази згинальних моментів

$$M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right),$$

граничні умови у випадку шарнірного обпирання країв мають вигляд:

$$\begin{aligned} W|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0, \\ W|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad W|_{y=b} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Граничним умовам (8.10), відповідно до [1], задовольняють функції

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Тому розв'язок (8.8) набуде вигляду

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (8.11)$$

Підставляючи далі (8.11) у (8.6), отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \left(\frac{\rho h}{D} \omega^2\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Рівняння (8.12) буде вірним, якщо для кожного члену ряду буде виконуватись рівність:

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] = \frac{\rho h}{D} \omega^2. \quad (8.13)$$

Рівняння (8.13) називається **частотним**. Розв'язками цього рівняння будуть *власні частоти*

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot \pi^2 \cdot \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]. \quad (8.14)$$

При цьому параметри m, n (*хвильові параметри*) визначають число напівхвиль у напрямках осей x і y відповідно у *власних формах*:

$$W_{mn} = a_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (8.15)$$

Проаналізуємо отримані результати

1. При $m = 1, n = 1$ реалізується безвузлова форма коливань (рис. 8.4):

$$W_{11} = a_{11} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

коли всі точки пластини одночасно проходять положення рівноваги і одночасно досягають максимального відхилення від положення рівноваги:

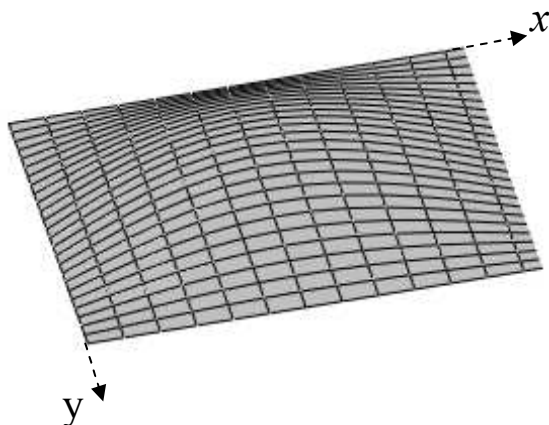


Рисунок 8.4

При $m = 2, n = 1$ реалізується форма коливань з однією вузловою лінією, що паралельна осі x (рис. 8.5):

$$W_{21} = a_{21} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

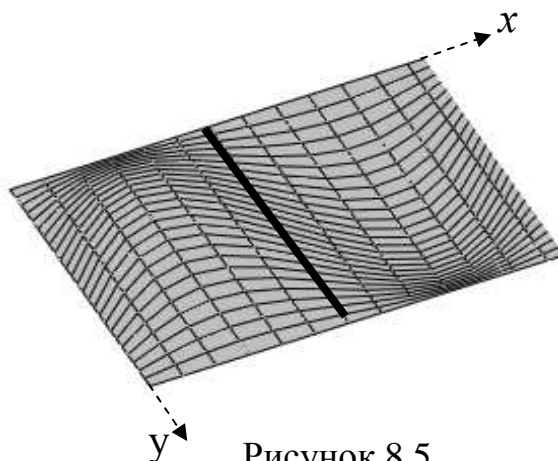


Рисунок 8.5

При $m = 2, n = 2$ реалізується форма коливань з двома вузловими лініями, паралельними осям x і y (рис. 8.6):

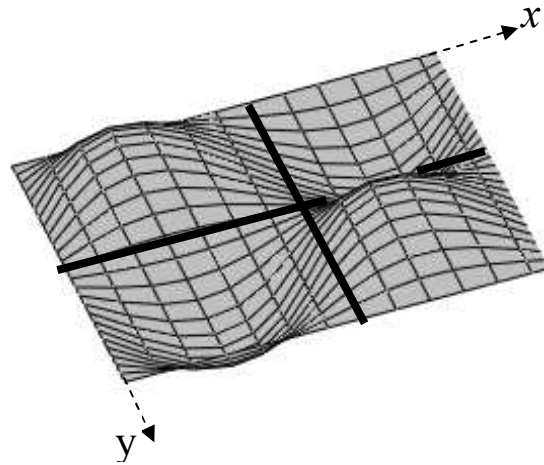


Рисунок 8.6

При цьому точки пластини, які належать **вузловим лініям**, при коливаннях залишаються нерухомими, а ділянки поверхні, які граничать з вузловою лінією, здійснюють коливання у протилежних фазах.

2. Аналізуючи спектр власних частот (формула (8.14)), можна відмітити наступне:

а) найнижча (*основна*) частота визначається при хвильових параметрах $m = 1, n = 1$, що відповідає безвузловій (*основній*) формі коливань;

б) існують частоти, що відповідають декільком парам значень хвильових параметрів. Наприклад, коли $\frac{m_1}{a} = \frac{n_2}{b}$, або $\frac{m_2}{a} = \frac{n_1}{b}$. При коливаннях з такою частотою відповідні власні форми «додаються» одна до одної.

8.3 Вільні коливання колової циліндричної оболонки з шарнірно обпертими торцями

Розглянемо замкнену оболонку з найпростішою геометрією – циліндричну. Для неї зручно використати циліндричну систему координат: $Ox\theta z$, де x, z – звичайні, θ – криволінійна координати (рис. 8.7). Позначимо R, h, l – відповідно радіус, товщину і довжину оболонки.

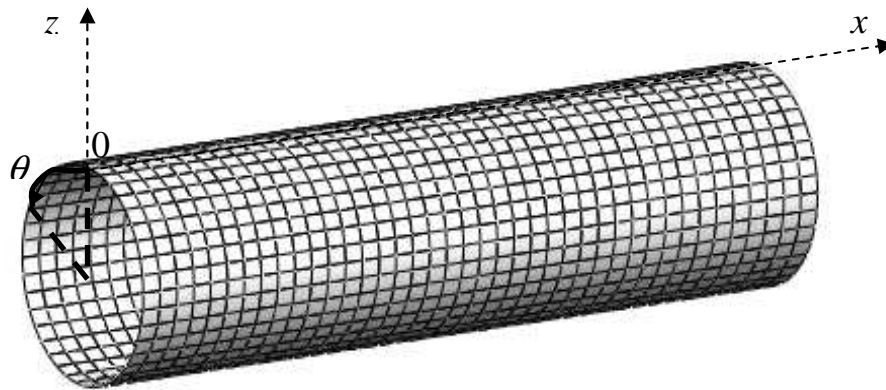


Рисунок 8.7

Виділимо елемент серединної поверхні і позначимо його переміщення уздовж осей $x\theta z$ відповідно: u – поздовжнє, v – дотичне, w – радіальне (прогин) (рис. 8.8).

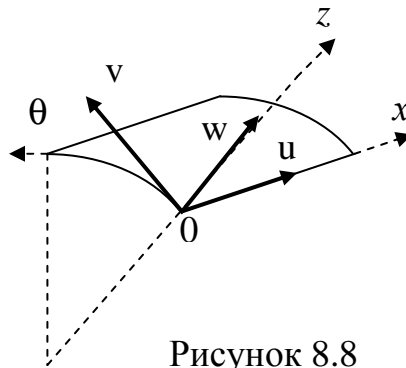


Рисунок 8.8

Розглядаючи рівновагу елемента оболонки, складемо:

1) рівняння рівноваги просторової системи сил (їх п'ять, шосте виконується тотожно на підставі закону парності дотичних напружень), які містять вісім невідомих погонних сил і моментів (рис. 8.9):

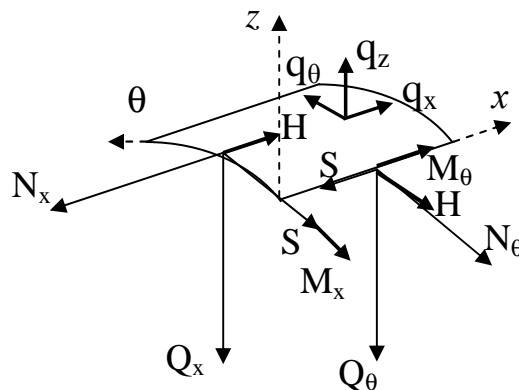


Рисунок 8.9

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + q_x &= 0, \\
\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial x} \right) + q_\theta &= 0, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + q_z &= 0, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} - Q_x &= 0, \\
\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta &= 0,
\end{aligned} \tag{8.16}$$

де N_x, N_θ – погонні нормальні сили; Q_x, Q_θ – погонні поперечні сили; S – погонна зсувна сила; M_x, M_θ – погонні згинальні моменти; H – погонний крутний момент.

2) шість фізичних співвідношень, які зв'язують на основі закону Гука погонні сили і моменти з шістьма компонентами деформації:

$$\begin{aligned}
N_x &= B(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = B(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_x), \quad S = Gh\gamma, \\
M_x &= D(\kappa_x + \mu \kappa_\theta), \quad M_\theta = D(\kappa_\theta + \mu \kappa_x), \quad H = D(1 - \mu)\chi,
\end{aligned} \tag{8.17}$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ – подовження;

γ – зсув;

κ_x, κ_θ – зміни кривин;

χ – кручення;

$B = \frac{Eh}{1 - \mu^2}$ – жорсткість оболонки на розтяг-стиск;

$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ – циліндрична жорсткість оболонки на згин;

$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ – модуль зсуву матеріалу оболонки у площині $z = \text{const}$.

3) шість геометричних співвідношень, що зв'язують компоненти деформації з трьома переміщеннями u, v, w .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad \gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad \chi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right).
\end{aligned} \tag{8.18}$$

У підсумку отримаємо 17 диференціальних рівнянь з 17 невідомими. Цю систему для циліндричної оболонки можна звести до трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно трьох переміщень.

Замінюючи, згідно з принципом Даламбера, статичне навантаження силами інерції, отримаємо **систему диференціальних рівнянь вільних коливань циліндричної оболонки**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\ - \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] &= \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R^2} + \\ + \frac{h^2}{12R^2} \left[R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right] &= - \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

У випадку шарнірного обпирання торців оболонки (наприклад, при установці на торцях жорстких шпангоутів), *граничні умови* набудуть вигляду: на торцях $x = 0$ і $x = l$ мусять виконуватись по чотири рівняння

$$\begin{aligned} v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] &= 0, \\ N_x = B \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (8.19), який задовольняє граничним умовам (8.20), розшукуємо у вигляді подвійних рядів:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t + \varepsilon_{mn}), \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \sin(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t + \varepsilon_{mn}), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t + \varepsilon_{mn}), \end{aligned} \quad (8.21)$$

де A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} – сталі коефіцієнти, $\omega_{mn}, \varepsilon_{mn}$ – частота і початкова фаза коливань.

Підставляючи (8.21) у (8.19) і прирівнюючи відповідні члени рядів у лівих і правих частинах рівнянь, отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} :

$$\begin{aligned}(a_{11} - \omega_{mn}^2)A_{mn} + a_{12}B_{mn} + a_{13}C_{mn} &= 0, \\ a_{21}A_{mn} + (a_{22} - \omega_{mn}^2)B_{mn} + a_{23}C_{mn} &= 0, \\ a_{31}A_{mn} + a_{32}B_{mn} + (a_{33} - \omega_{mn}^2)C_{mn} &= 0,\end{aligned}\tag{8.22}$$

де a_{ij} – параметри, що залежать від чисел m, n і сталих параметрів, що визначають властивості матеріалу і геометричні розміри оболонки: ρ, E, μ, h, R, l .

Умовою існування ненульового розв’язка рівнянь (8.22) буде рівність нулю визначника цієї системи:

$$\Delta(\omega_{mn}^6) = 0.\tag{8.23}$$

Рівняння (8.23) називається **частотним**. Визначник (8.23) має третій порядок відносно ω_{mn}^2 . Від’ємні значення ω_{mn} відкидаємо як такі, що не мають фізичного змісту. Отже, для кожної пари чисел m, n отримуємо по три значення *власних частот* $\omega_{mn_1}, \omega_{mn_2}, \omega_{mn_3}$. Ці частоти відповідають переважно радіальним (згинальним) ω_{mn_1} , поздовжнім ω_{mn_2} і крутним ω_{mn_3} коливанням оболонки, при цьому найменша частота ω_{mn_1} відповідає радіальним коливанням.

Проаналізуємо властивості вільних коливань оболонок:

1) при $n = 0$ дотичні переміщення v відсутні, а переміщення u, w не залежать від координати θ . Такі коливання називаються **осесиметричними**;

2) спектр частот оболонки має область “згущення”, де частоти для різних пар чисел m, n відрізняються одна від одної на досить невелике значення;

3) найнижча частота коливань оболонки відповідає числу $m = 1$, але число n при цьому (на відміну від пластини) не дорівнює 1, а залежно від параметрів оболонки може дорівнювати 4, 5, 6 та ін.;

4) форми власних коливань оболонки, наприклад, для радіального переміщення w , залежно від хвильових чисел m, n мають наступний вигляд:

при $m = 1, n = 0$ реалізується безвузлова за довжиною і осесиметрична за колом (безвузлова) форма коливань (рис. 8.10);

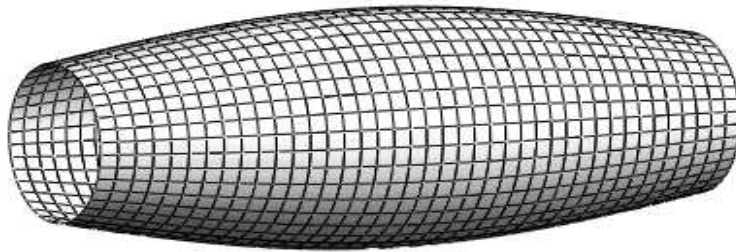


Рисунок 8.10

при $m = 2, n = 0$ реалізується одновузлова за довжиною і осесиметрична за колом форма коливань (рис. 8.11);

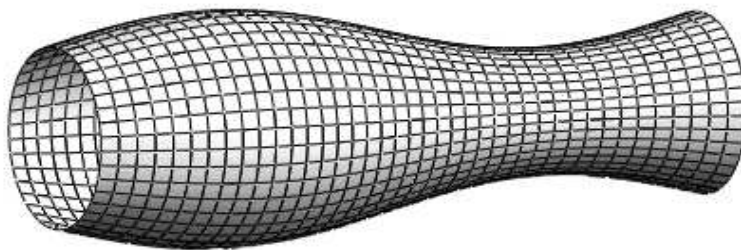


Рисунок 8.11

при $m = 3, n = 0$ реалізується двовузлова за довжиною і осесиметрична за колом форма коливань (рис. 8.12);

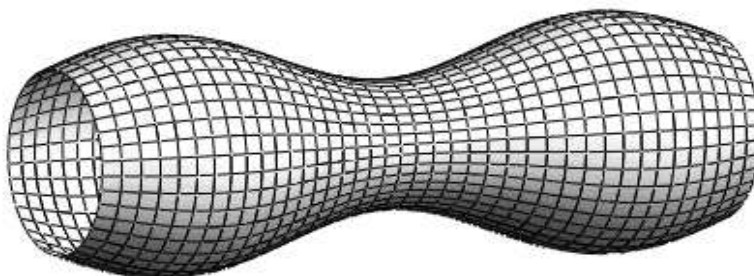


Рисунок 8.12

при $m = 1, n = 1$ реалізується безвузлова за довжиною і двовузлова за колом форма коливань (рис. 8.13);

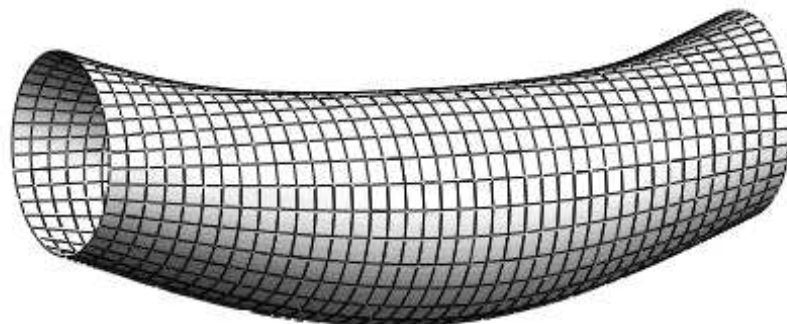


Рисунок 8.13

при $m = 1, n = 2$ реалізується безвузлова за довжиною і чотиривузлова за колом форма коливань (рис. 8.14);

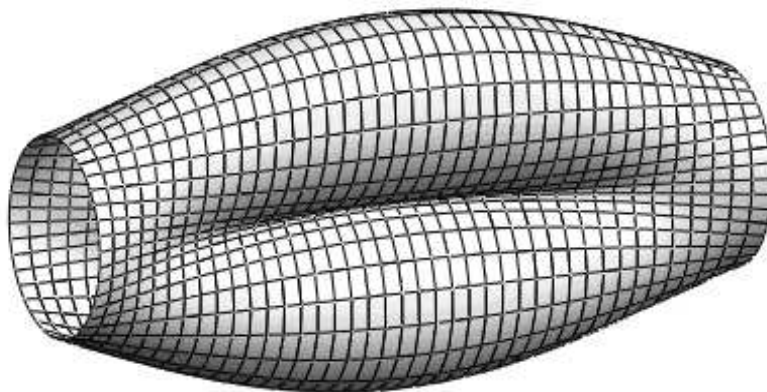


Рисунок 8.14

при $m = 1, n = 3$ реалізується безвузлова за довжиною і шестивузлова за колом форма коливань (рис. 8.15);

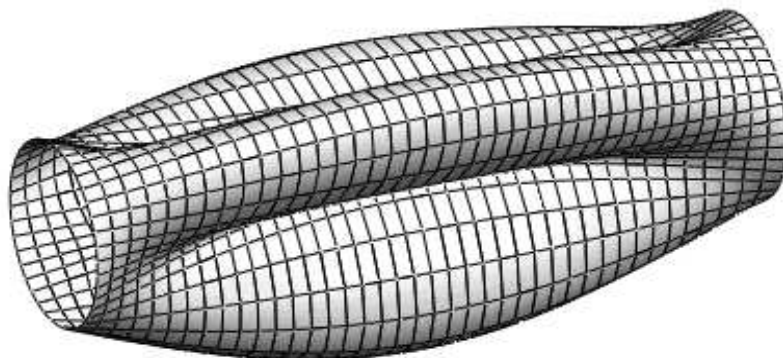


Рисунок 8.15

при $m = 3, n = 3$ реалізується двовузлова за довжиною і шестивузлова за колом форма коливань (рис. 8.16);

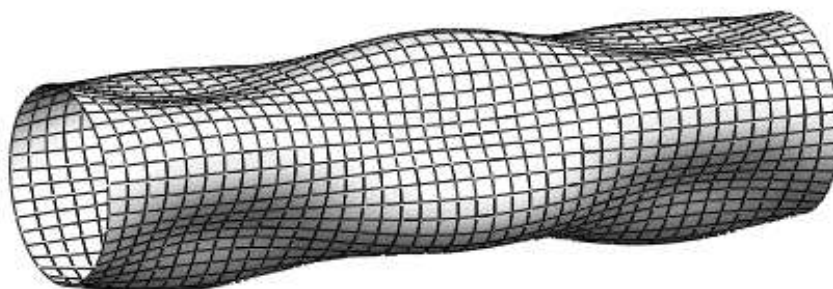


Рисунок 8.16

при $m = 9$, $n = 6$ реалізується восьмивузлова за довжиною і дванадцятивузлова за колом форма коливань (рис. 8.17);

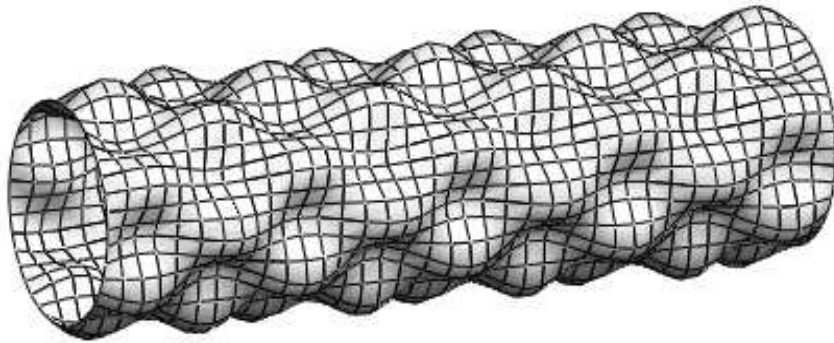


Рисунок 8.17

Питання для самоконтролю

1. Які основні допущення приймаються в теорії малих коливань пластин і оболонок?
2. Які закони використовуються для отримання диференціального рівняння вільних коливань пластини і оболонки?
3. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння?
4. Як вибирають функції власних форм у випадку вільного (шарнірного) обпирання країв пластини (торців циліндричної оболонки)?
5. Які рівняння виражають граничні умови для вільного (шарнірного) обпирання країв пластини (торців циліндричної оболонки)?
6. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань пластини і оболонки?
7. Як отримують частотне рівняння при вільних коливаннях пластини і оболонки при розглянутих граничних умовах?
8. Якою закономірністю пов'язані кількість вузлових ліній і хвильові параметри вільних коливань пластини і оболонки?
9. Наведіть особливості спектрів власних частот пластини й оболонки.

IV ОСНОВИ ТЕОРІЇ УДАРУ

9 Елементарна теорія удару

Явище удару досить часто зустрічається в техніці і може мати як бажаний характер, наприклад, як елемент технологічних процесів (дроблення крихких тіл, ковка, штамповка, забивання палів), так і небажаний (удари морських хвиль об корабель, ударні дії на залізничні вагони або мостові споруди при проходженні стиків рейок, удари при падінні тіл і вибухи при аваріях тощо).

Механізм ударної взаємодії є досить складним процесом, який потребує урахування фізичних властивостей тіл під час їх зіткнення. Але в першому наближенні можна використати положення, що ґрунтуються на дослідженнях Ньютона. Це наближення є достатньо добрим, якщо під час удару відбувається тільки місцева деформація поблизу точки контакту тіл.

9.1 Основні визначення і рівняння теорії удару матеріальної точки

При русі матеріальної точки під дією зовнішніх сил її швидкість змінюється в часі безперервно: кожному малому проміжку часу $\Delta t = \tau$ відповідає малий приріст швидкості $\Delta \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_0$. У цьому можна переконатись, якщо застосувати теорему про середнє до правої частини теореми про зміну кількості руху точки:

$$m(\bar{V}_1 - \bar{V}_0) = \int_0^{\tau} \bar{F} \cdot dt \approx \bar{F}_{cp} \cdot \tau, \quad (9.1)$$

де F_{cp} – середнє значення сили за час її дії.

Якщо сила, що діє на точку, буде достатньо великою (мати порядок $\frac{1}{\tau}$), то приріст швидкості $\Delta \bar{V}$ за малий проміжок часу τ буде скінченною величиною.

Явище, при якому швидкість точки за малий проміжок часу τ змінюється на скінченну величину, називається **ударом**. Проміжок часу τ , протягом якого відбувається удар, називається **часом удару**. Сила, яка діє протягом часу удару і досягає значної величини, називається **ударною силою**. Як правило, точний закон зміни за часом ударної сили невідомий, але наближений графік її модуля має вигляд (рис. 9.1).

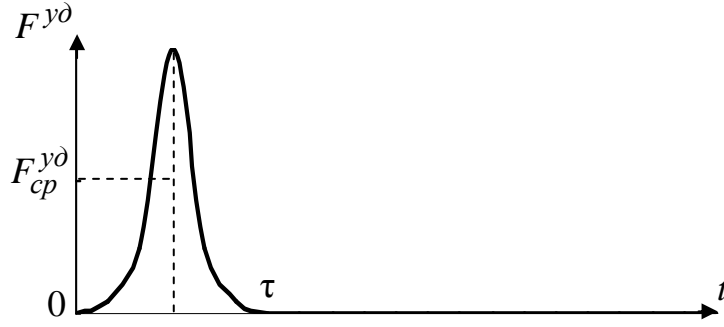


Рисунок 9.1

Зважаючи на те, що ударні сили змінюються за короткий проміжок часу досить значно, в теорії удару як *міру взаємодії точок* (або тіл) розглядають не самі сили, а їх *імпульси*. Вектор

$$\bar{S}^{y\partial} = \int_0^{\tau} \bar{F}^{y\partial} \cdot dt \approx \bar{F}_{cp}^{y\partial} \cdot \tau \quad (9.2)$$

називається **ударним імпульсом**. Ударний імпульс $\bar{S}^{y\partial}$ при малому часі удару τ є скінченною величиною.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається відносно інерціальної системи відліку і на яку, крім звичайних, діють ударні сили. Позначимо її швидкість до удару \bar{v} , а після удару \bar{u} . Тоді за час удару для неї буде справедливою теорема про зміну кількості руху:

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{y\partial}, \quad (9.3)$$

де N – кількість ударних сил. У праву частину рівняння (9.3) не входять імпульси неударних сил (які є сталими, або за час удару змінюються незначно, наприклад, сила ваги точки), оскільки при малому часі удару їх імпульси будуть малими в порівнянні з імпульсами ударних сил.

Рівняння (9.3) є **основним рівнянням теорії удару матеріальної точки** і формулюється наступним чином: *зміна кількості руху матеріальної точки під час удару дорівнює геометричній сумі діючих на точку ударних імпульсів*.

Відмітимо властивість переміщення точки під час удару. За визначенням, $\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\tau}$, звідки $\Delta \bar{r} = \bar{V}_{cp} \cdot \tau$. Це означає, що при малому часі удару τ переміщення точки за цей час $\Delta \bar{r}$ є малою величиною.

Отже, наведемо основні результати елементарної теорії удару матеріальної точки:

- 1) зміна швидкості точки під час удару визначається основним рівнянням теорії удару (9.3);
- 2) дією неударних сил під час удару можна нехтувати;
- 3) переміщенням точки під час удару можна нехтувати.

Основними завданнями теорії удару матеріальної точки є визначення її швидкості після удару при відомій швидкості до удару, а також визначення ударних імпульсів.

Зауваження. Наведені результати можна застосовувати не тільки до ударних сил, що виникають у точці контакту тіл, але й до будь-яких інших, закон зміни за часом яких має вигляд функції на рисунку 9.1. Такі сили виникають при вибуху в порожнині, при розповсюдженні пружних хвиль у суцільному середовищі, при розривах у потоці рідини або газу.

9.2 Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення при ударі

Розглянемо процес удару двох тіл. При їх зіткненні у точці контакту виникають ударні сили, які діють на кожне тіло, є рівними за модулем, протилежними за напрямом і лежать на спільній лінії дії (третій закон Ньютона).

Введемо припущення:

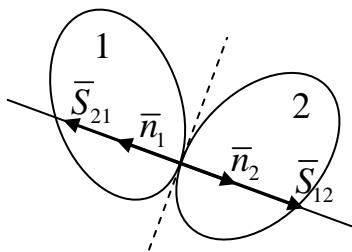


Рисунок 9.2

- 1) ударні сили і їх імпульси $\bar{S}_{12}, \bar{S}_{21}$ напрямлені уздовж спільної нормалі до поверхонь тіл у точці їх контакту (рис. 9.2);
- 2) силами тертя у точці контакту можна нехтувати;
- 3) при ударі необхідно враховувати деформування тіл.

Процес удару можна поділити на дві фази.

Перша фаза – зближення тіл по спільній нормалі, проекція відносної швидкості точки контакту на нормаль зменшується до нуля, кінетична енергія руху переходить у внутрішню потенціальну енергію деформації тіл.

Друга фаза – тіла, що відновлюють свою форму, віддаляються одне від одного, проекція відносної швидкості точки контакту на нормаль збільшується, але не досягає свого значення до удару, внутрішня потенціальна енергія деформації знов переходить у кінетичну енергію руху, проте частина її уходить на нагрівання тіл і залишкові деформації.

Як показують досліди, в першому наближенні можна прийняти *гіпотезу Ньютонa*: відношення модуля нормальної складової відносної швидкості точки контакту тіл після удару до її значення до удару є величиною сталою, яка в певних межах не залежить від відносної швидкості і мас тіл, а визначається тільки матеріалом тіл, що стикаються. Цю сталу величину, яку позначимо через k називають *коефіцієнтом відновлення* при ударі

$$k = \frac{|u_n^r|}{|v_n^r|}. \quad (9.4)$$

Значення коефіцієнта відновлення знаходяться в межах $0 \leq k \leq 1$.

При $k = 0$ удар називають *абсолютно непружним*. У цьому разі весь процес удару відбувається в першій фазі удару. Форма тіл не відновлюється. Обидва тіла після удару рухаються як одне ціле, втративши частину кінетичної енергії на деформацію і тепло.

При $k = 1$ удар називають *абсолютно пружним*. Втрати кінетичної енергії не відбувається і тіла у другій фазі удару повністю відновлюють свою форму. Це – граничні випадки.

В інших випадках $0 < k < 1$ і удар називають *не зовсім пружним* або просто *пружним*.

Наведемо значення коефіцієнта відновлення для деяких матеріалів: дерево – 0,5; сталь – 0,56; скло – 0,94.

Приклад 1. Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення.

Розв'язання

На масивну плиту з висоти h_1 кидають кульку без початкової швидкості. Плита і кулька виготовлені з того самого матеріалу. Кулька ударяється об плиту зі швидкістю $v = \sqrt{2gh_1}$ (цю формулу можна отримати за допомогою, наприклад, теореми про зміну кінетичної енергії точки). Після удару кулька відскочить на висоту h_2 зі швидкістю $u = \sqrt{2gh_2}$. Оскільки ці швидкості нормальні до поверхні плити, то

$$k = \frac{|u_n^r|}{|v_n^r|} = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (9.5)$$

Таким чином, заміряючи висоти падіння h_1 і відскоку кульки від поверхні h_2 , можна визначити коефіцієнт відновлення k .

Приклад 2. Матеріальна точка маси m падає на горизонтальну поверхню з того самого матеріалу зі швидкістю v під кутом падіння α . Коефіцієнт відновлення дорівнює k . Потрібно визначити кут відбиття β , швидкість точки після удару u і ударний імпульс $S^{y\partial}$ реакції поверхні (рис. 9.3).

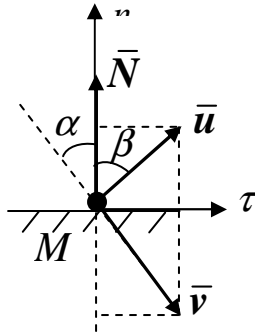


Рисунок 9.3

Розв'язання

На матеріальну точку під час удару об поверхню діють сила тяжіння і нормальна реакція поверхні \bar{N} . Сила тяжіння не є ударною, тому діючий на точку ударний імпульс визначається як

$$\bar{S}^{y\partial} = \int_0^{\tau} \bar{N} \cdot dt.$$

Проведемо осі натуральної системи відліку τ, n і спроекуємо векторне рівняння (9.3) на ці осі:

$$\begin{cases} m(u_{\tau} - v_{\tau}) = S_{\tau}^{y\partial} \\ m(u_n - v_n) = S_n^{y\partial}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m(u \cdot \sin \beta - v \cdot \sin \alpha) = 0 \\ m[u \cdot \cos \beta - (-v \cdot \cos \alpha)] = S^{y\partial}. \end{cases} \quad (9.6)$$

Додамо до отриманої системи рівняння (9.4):

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} = \frac{u \cdot \cos \beta}{v \cdot \cos \alpha}. \quad (9.7)$$

З системи трьох останніх алгебраїчних рівнянь знайдемо три шукані величини. З рівняння (9.7)

$$u = \frac{k \cdot v \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (9.8)$$

Підставимо отриманий результат у перше рівняння системи (9.6):

$$m \cdot \left[\frac{k \cdot v \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta - v \cdot \sin \alpha \right] = 0.$$

Звідки $k \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \sin \alpha = 0$, або $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

або $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (9.9)$

Нарешті, з другого рівняння системи (9.6) отримаємо розрахункову формулу для ударного імпульсу:

$$S^{y\partial} = m[u \cdot \cos \beta + v \cdot \cos \alpha],$$

яка з урахуванням формули (9.8) може бути записана у вигляді

$$S^{y\partial} = m \cdot (1 + k) \cdot v \cdot \cos \alpha \quad (9.10)$$

Проаналізуємо отримані результати (9.9), (9.8), (9.10).

1. З формул (9.8), (9.9) випливає, що для абсолютно пружного удару ($k=1$) кут падіння дорівнює куту відбиття $\alpha = \beta$, а швидкість точки при ударі за модулем не змінюється $u = v$. При пружному ударі ($0 < k < 1$) кут відбиття більший за кут падіння $\beta > \alpha$ (і тільки при вертикальному падінні $\beta = \alpha = 0$). Модуль швидкості після удару в цьому випадку завжди менший за модуль швидкості до удару $u < v$, оскільки $u \cdot \sin \beta = v \cdot \sin \alpha$ (див. формулу (9.6)), а при вертикальному падінні $u = k \cdot v$ (див. формулу (9.7)).

2. З формули (9.10) видно, що ударний імпульс при абсолютно пружному ударі ($k=1$) вдвічі більший за ударний імпульс при абсолютно непружному ударі ($k=0$) і досягає максимальної величини при вертикальному падінні точки на поверхню (при $\alpha = 0$).

9.3 Загальні теореми теорії удару механічної системи

9.3.1 Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі

Ця теорема в інтегральній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але у праву частину будуть входити тільки ударні імпульси:

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^{y\partial e}, \quad (9.11)$$

де n – число точок системи, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 – кількість руху системи до і після удару відповідно, $\bar{S}_k^{y\partial e}$ – зовнішні ударні імпульси.

Формулюється **теорема** наступним чином: *зміна кількості руху механічної системи під час удару дорівнює геометричній сумі ударних імпульсів зовнішніх сил, що діють на систему.*

Зауваження 1. При розв'язанні задач векторне рівняння (9.11) звичайно проєктують на осі координат.

Зауваження 2. Внутрішні ударні імпульси не можуть змінити кількість руху механічної системи (вони не входять в рівняння (9.11)).

9.3.2 Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі

Зазначена теорема в диференціальній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але в праву частину будуть входити моменти тільки ударних сил:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e}), \quad (9.12)$$

де n – число точок системи, \bar{K}_o – момент кількості руху системи відносно центра O , $\bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e})$ – моменти зовнішніх ударних сил відносно того ж центра.

Оскільки переміщеннями точок системи під час удару можна нехтувати, цю теорему в теорії удару звичайно використовують в інтегральній формі. Розділимо в рівнянні (9.12) змінні й зінтегруємо за часом обидві частини, використовуючи для моменту сили вираз $\bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e}) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{y\partial e}$, де \bar{r}_k – радіус-вектор k -ї точки системи, який не змінюється за час удару:

$$\int_0^{\tau} d\bar{K}_o = \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{y\partial e}) dt = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \int_0^{\tau} \bar{F}_k^{y\partial e} dt) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{S}_k^{y\partial e}),$$

або

$$\bar{K}_{20} - \bar{K}_{10} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_o(\bar{S}_k^{y\partial e}). \quad (9.13)$$

Рівняння (9.13) виражає **теорему** про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі в інтегральній формі: *зміна моменту кількості руху механічної системи відносно центра O під час удару дорівнює геометричній сумі моментів ударних імпульсів зовнішніх сил, які діють на систему, відносно того ж центра.*

Для даної теореми мають місце зауваження, наведені у п. 9.3.1.

9.3.3 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі (теорема Карно)

Введемо ще дві характеристики удару.

Удар двох тіл називається **центральним**, якщо спільна нормаль у точці контакту тіл проходить через їх центри мас. Удар двох тіл називається **прямим**, якщо швидкості центрів мас тіл на початку удару напрямлені по спільній нормалі в точці контакту тіл.

Розглянемо випадок *абсолютно непружного* удару двох тіл, які здійснюють *поступальний рух*. Для простоти розглянемо *прямий* удар двох куль. Він буде також і *центральним*, оскільки нормаль у точці контакту куль проходить через їх центри мас (рис. 9.4).

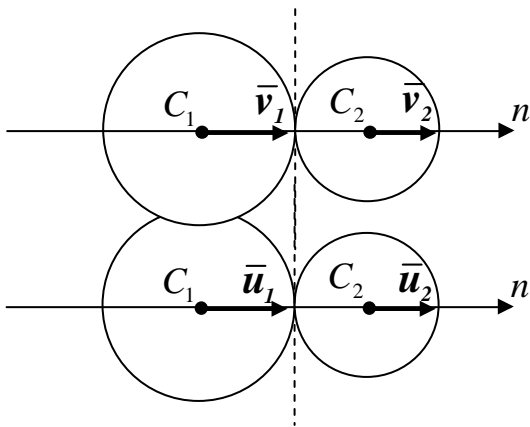


Рисунок 9.4

Кінетична енергія системи до удару

дорівнює
$$T_1 = \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2}.$$

Після абсолютно непружного удару тіла рухаються з однаковою швидкістю $u_1 = u_2 = u$ і кінетична енергія після

удару дорівнює
$$T_2 = \frac{(M_1 + M_2)u^2}{2}.$$

Таким чином, при ударі втрачається кінетична енергія

$$\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - 2T_2 + T_2.$$

Спроектуємо на вісь нормалі n рівняння теореми про зміну кількості руху системи (9.11)

$$(M_1 + M_2)u - (M_1 v_1 + M_2 v_2) = 0,$$

звідки

$$(M_1 + M_2)u = M_1 v_1 + M_2 v_2. \quad (9.14)$$

Тоді

$$2T_2 = (M_1 + M_2)u \cdot u = (M_1 v_1 + M_2 v_2)u = M_1 v_1 u + M_2 v_2 u.$$

Підставимо останню рівність у формулу втраченої кінетичної енергії

$$\Delta T = T_1 - 2T_2 + T_2 = \frac{1}{2}[M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 - 2M_1 v_1 u - 2M_2 v_2 u + M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2]$$

і згрупуємо доданки

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{M_1(v_1 - u)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u)^2}{2}. \quad (9.15)$$

У формулі (9.15) різниці $(v_1 - u), (v_2 - u)$ показують, на скільки зменшується при ударі швидкість кожного з тіл, їх називають «**втраченими швидкостями**».

Отже, рівність (9.15) виражає **теорему Карно** про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі: *кінетична енергія, що втрачається системою тіл при абсолютно непружному ударі, дорівнює тій кінетичній енергії, яку б мала система за умови, що її тіла рухались із «втраченими швидкостями».*

Зауваження. Розмірковуючи аналогічним чином, можна узагальнити теорему (9.15) на випадок пружного удару ($0 < k < 1$):

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} \cdot \left[\frac{M_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u_2)^2}{2} \right]. \quad (9.16)$$

Проаналізуємо *деякі випадки при абсолютно непружному ударі, якщо друге тіло було до удару нерухомим* ($v_2 = 0$). У цьому разі з рівняння (9.14)

знаходимо $u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}$. Тоді формула для кінетичної енергії T_2 набуває

вигляду

$$T_2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot u^2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot \left(\frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} \right)^2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_1 v_1^2}{2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_1. \quad (9.17)$$

З рівняння (9.17) випливає наступне.

1. Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в кінетичну енергію руху тіл після удару ($T_2 \approx T_1$), треба виконати умову $M_1 \gg M_2$. Тобто маса тіла, що ударяється, була б якомога

більшою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при забиванні цвяхів, палів тощо.

2. Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в потенціальну енергію деформації тіла після удару ($T_2 \approx 0$), треба виконати зворотню умову $M_1 \ll M_2$. Тобто маса тіла, що ударяється, була б якомога меншою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при куванні, штампуванні металів тощо.

9.4 Поняття про центр удару

Обговоримо коротко основні висновки, що відбуваються при ударі по тілу, яке обертається навколо нерухомої осі. В опорах осі (звичайно це підшипник і підп'ятник) виникають ударні реакції, що можуть призвести до передчасної руйнації цих опор і осі. Щоб удар не передавався на опори А і В осі обертання АВ, мають виконуватися наступні умови [7] (рис. 9.5):

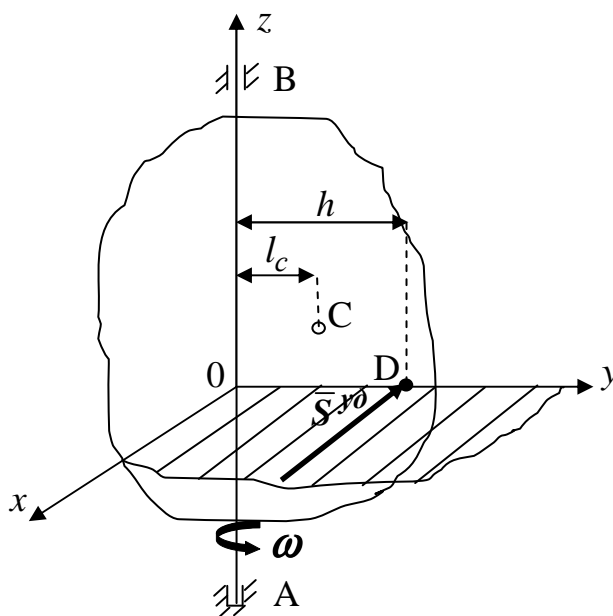


Рисунок 9.5

- 1) площина xOy , що містить ударний імпульс \vec{S}_{yd} і перпендикулярна до осі обертання, має перетинатися з нею в точці O , для якої вісь обертання є головною віссю інерції (для якої відцентрові моменти інерції, які містять індекс осі, дорівнюють нулю);
- 2) лінія дії ударного імпульсу має бути перпендикулярною до площини yOz , що містить центр мас тіла і вісь обертання;

3) лінія дії ударного імпульсу має бути віддалена від осі обертання на відстань h , яка дорівнює зведеній довжині фізичного маятника ($h = \frac{I_z}{M \cdot l_C}$, де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, l_C – відстань від осі обертання до центра мас тіла). При цьому лінія дії ударного імпульсу і центр мас тіла мусять знаходитися з одного боку від осі обертання.

Точка, в якій прикладений ударний імпульс, що задовольняє всім наведеним умовам і не викликає ударних реакцій, називається **центром удару**.

Зауваження. Якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла, то центр удару не існує і будь-який удар буде викликати ударні реакції.

Приклад 3. Визначити положення центра удару палицею по нерухомій опорі К, якщо тримати палицю рукою за її кінець О (рис. 9.6).

Розв'язання

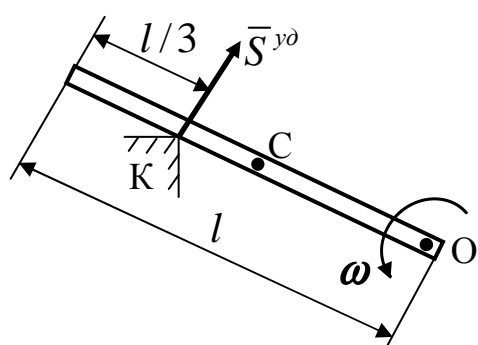


Рисунок 9.6

Будемо вважати палицю однорідним стержнем завдовжки l , а вісь її обертання такою, що проходить перпендикулярно до площини рисунка через точку О. Момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його кінець,

дорівнює (див. [3, 7]) $I_z = \frac{ml^2}{3}$,

де m – маса стержня, а відстань від осі обертання до центра мас $l_C = l/2$. Тоді лінія дії ударного імпульсу \vec{S}^{yd} має бути віддаленою від осі обертання на відстань $OK = h$, що дорівнює

$$h = \frac{I_z}{m \cdot l_C} = \frac{\frac{ml^2}{3}}{m \cdot \frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l.$$

Отже, центр удару буде віддаленим від руки на дві третини довжини стержня або на третину довжини від його вільного кінця.

Таким чином, щоб рука не випробувала ударних реакцій, палицею потрібно ударяти тим місцем, яке відстоїть від вільного кінця на третину її довжини.

Питання для самоконтролю

1. Що є мірою взаємодії тіл при ударі?
2. Який вигляд має основне рівняння удару матеріальної точки?
3. Наведіть основні результати теорії удару матеріальної точки.
4. У чому полягає гіпотеза Ньютона при ударі, які межі її застосування?
5. Як формулюється теорема про зміну кількості руху системи при ударі?
6. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху системи при ударі?
7. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії системи при ударі?
8. Що називається центром удару? Чи завжди він існує?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – Москва : Дрофа, 2004. – 509 с.
2. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва : Наука, 1971 – 1973. – Т. 2. – 624 с. ; Т. 3. – 487 с.
3. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Москва : Наука, 1979. – Т. 2. – 461 с.
4. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкості руху : підручник / М. В. Василенко, О. М. Алексейчук. – Київ : Вища шк., 2004. – 525 с.
5. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – Москва : Высш. шк., 1965. – 468 с.
6. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – Москва : Наука, 1980. – 446 с.
7. Павловський М. А. Теоретична механіка: підручник / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
8. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – Москва : Наука, 1971. – 239 с.
9. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я. Г. Пановко. – Москва : Машиздат, 1967. – 336 с.
10. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механки / С. М. Тарг. – Москва : Высш. шк., 2001. – 416 с.
11. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле : пер. с англ. / С. П. Тимошенко – Москва : Наука, 1967. – 440 с.
12. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: в 2 т. / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Москва : Высш. шк., 1977. – Т. 2. – 532 с.
13. Яблонский А. А. Курс теории колебаний / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. – Москва : Высш. шк., 1975. – 255 с.
14. Теоретична механіка : навч.-метод. посібник і завдання для контрольних і самостійних робіт / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 146 с.
15. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1986. – 512 с.
16. Шпачук В. П. Двумерное преобразование Лапласа в задачах теории упругости / В. П. Шпачук, Я. В. Плотницкая // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып. 72. – Київ : Техніка, 2007. – С. 269 – 274.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Амплітуда коливань вільних 68
- Варіація радіуса-вектора 13
- В'язь 10
- голономна 11
 - ідеальна 13
 - неголономна 11
 - нестационарна 11
 - неутримуюча 11
 - стаціонарна 11
 - утримуюча 11
- Гіпотеза Ньютона 181
- Гаситель коливань динамічний 98
- Декремент затухаючих коливань 75
- логарифмічний 75
- Енергія потенціальна 35
- Загальне рівняння статички 17
- Збурення 55
- Імпульс ударний 179
- Коефіцієнт демпфірування 74
- відновлення 181
 - динамічності 85
 - форми коливань 91,103
 - податливості (впливу) 102, 157
- Коливання вимушені 78
- вільні (власні) 68
 - головні 90
 - затухаючі 74
 - лінійні 51
 - осесиметричні 173
- Лінія вузлова 169
- Механіка аналітична 9
- зображальна 55
- Оболонка 164
- Ортогональність форм коливань 138
- Параметри хвильові 168
- Переміщення можливе системи 13
- — точки 12
- Період коливань вільних 68
- — затухаючих 75
- Пластина 164
- Поверхня серединна 164
- Положення рівноваги байдуже 57
- — нестійке 55
 - — стійке 55, 56
 - — стійке асимптотично 55, 56
- Принцип можливих переміщень (теорема Лагранжа-Остроградського) 15
- Даламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки) 24
- Прогин 165
- Резонанс 84,97
- Рівняння в'язі 10
- Лагранжа другого роду 41
 - — — — для консервативних систем 43
 - частотне 89, 103, 121, 130, 167, 173
- Робота пари сил можлива 13
- сили можлива 13
- Рух аперіодичний 73
- збурений 55
- Система вільна 10
- невільна 10
- Сили дисипативні 64
- консервативні 35
 - ударні 178
- Стержень 118
- Теорема Лагранжа-Дирихле 57
- Ляпунова 60
 - Сільвестра 59
- Точка вузлова 125, 137
- Фазова площина 55
- траєкторія 55

Удар 178
— абсолютно непружний 181
— — пружний 181
— пружний 181
— прямий 185
— центральний 185
Узагальнені коефіцієнти інерції 63
— — жорсткості 58
— — опору 64
— координати 33
— сили 34
— швидкості 33
Умови граничні 121, 130
— рівноваги в узагальнених координатах 38

Фаза коливань 68
— — початкова 68

Форма коливань власних 91, 121, 130
— — вимушених 142
Формула Донкерлі 157
— Релея 154
Функція Лагранжа 43
— Релея (дисипативна) 64

Час удару 178
Частота коливань вільних (власна) 68, 90, 121, 130
— — затухаючих 74
— — основна 90
— — парціальна 90
Число степенів вільності 32

Центр удару 188

Швидкості втрачені 186

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович
РУБАНЕНКО Олександр Ігоревич

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

СПЕЦКУРС

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *В. П. Шпачук*

Редактор

З. І. Зайцева

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

Дизайн обкладинки *Г. А. Коровкіна*

Підп. до друку 20.04.2015 р.
Друк на різнографі
Тираж 50 пр.

Формат 60x84/16
Ум. друк. арк. 11,4
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.